

DIFERENCIALNE ENAČBE

Diferencialna enačba je enačba, v kateri nastopa iskana funkcija, njeni odvodi in neodvisne spremenljivke.

$$F(y, y', y'', y''', x) = 0$$

Red diferencialne enačbe je **stopnja** najvišjega odvoda.

Diferencialna enačbe je **linearna**, če vsi odvodi nastopajo s potenco ena.

Če je iskana funkcija le funkcija ene spremenljivke, rečemo taki enačbi **navadna diferencialna enačba**.

Če pa z enačbo iščemo funkcijo več spremenljivk (odvodi so parcialni odvodi), rečemo enačbi **parcialna diferencialna enačba**.

Rešitev diferencialne enačbe je vsaka funkcija, za katero velja enakost v enačbi.

Splošna rešitev diferencialne enačbe je množica vseh rešitev.

Partikularna rešitev diferencialne enačbe je posamezna – posebna rešitev.

Včasih iščemo le tiste rešitve, ki zadoščajo nekim posebnim pogojem.

Začetni pogoj določi vrednost funkcije (odvodov) v neki točki.

Robni pogoji določijo vrednost funkcije (odvodov) v različnih točkah.

DIFERENCIALNE ENAČBE PRVEGA REDA

- LOČLJIVI SPREMENLJIVKI

Diferencialne enačbe oblike $y' = f(x, y)$, kjer je $f(x, y) = h(x)g(y)$.

Metoda reševanja enačbe

$$y' = h(x)g(y)$$

- Zapis v diferencialni obliki $\frac{dy}{dx} = h(x)g(y)$
- Ločevanje spremenljivk $\frac{dy}{g(y)} = h(x)dx$
- **Integracija (splošna rešitev)** $\int \frac{dy}{g(y)} = \int h(x)dx + C$
- Določanje vrednost konstante (začetni ali rodni pogoj) in določanje partikularne rešitve.

1. Rešite naslednje diferencialne enačbe.

a. $y' - xy^2 = 2xy$

b. $(1 + x^2)y' + x = -2xy$

c. $(x + 1)y' + xy = 0$

d. $2x^2yy' + y^2 = 2$

e. $\sqrt{1 + y^2}dx = xydy$

f. $xdy + (1 - y)ydx = 0$

g. $y' = 5\sqrt[5]{y^3}$

h. $y' = 5\sqrt[5]{x^3}$

1. Poišči tisto rešitev DE $y' - 2x = 0$, ki ustreza pogoju $y = 1$ pri $x = 0$. R: $y = x^2 + 1$.
2. $xyy' = 1 - x^2$, R: $x^2 + y^2 = \ln Dx^2$.
3. $\operatorname{tg} y dx - \operatorname{ctg} x dy = 0$, R: $\sin y \cos x = D$.
4. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, R: $\arctan y = \arctan x + C$.
5. $(2x + 1) dy + y^2 dx = 0$. Poišči tisto partikularno rešitev, ki gre skozi točko $T(1, 4)$. R: $3e^{\frac{1}{y}} = 3\sqrt{2x + 1}$.
6. $(xy - x) dx + (xy + x - y - 1) dy = 0$. R: $(x - 1)(y - 1)^2 e^{x+y} = C$.
7. $xy' - y = y^3$, R: $x = \frac{Dy}{\sqrt{y^2 + 1}}$.

8.

Katera družina krivulj reši diferencialno enačbo $y' = \frac{y}{x}$? Med njimi poišči tisto krivuljo, ki gre skozi točko:

(a) $(1, 2)$,

(b) $(0, 0)$.

9. Rešite naslednje diferencialne enačbe.

$$yy' = 3x^2$$

$$\left[\pm \sqrt{2x^3 + c} \right]$$

$$y' = xy + x$$

$$\left[a e^{x^2/2} - 1 \right]$$

$$xy' - 3y + 1 = 0$$

$$\left[\frac{1}{3} + ax^3 \right]$$

10. Rešite naslednje diferencialne enačbe.

$$y' = x(1 + y^2)$$

$$y' \sqrt{1 - x^2} + y^2 = 0$$

$$y' \sqrt{x} = \sqrt{y}$$

$$xy' = y^2 - 1$$

$$y = y' \operatorname{tg} x$$

- **LINEARNE DIFERENCIALNE ENAČBE PRVEGA REDA**

Diferencialne enačbe oblike $y' + P(x)y = Q(x)$, če je $Q(x) = 0$ enačbi pravimo homogena.

Metoda reševanja enačbe

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

- Enačbi priredimo homogeno $z' + P(x)z = 0$
- Zapis v diferencialni obliki $\frac{dz}{dx} = -P(x)z$
- Ločevanje spremenljivk $\frac{dz}{z} = -P(x)dx$
- Integracija (splošna rešitev) $\int \frac{dz}{z} = \int -P(x)dx + C$

$$\ln|z| = \int -P(x)dx + C$$

- **Rešitev prirejene homogene je:** $z = e^{\int -P(x)dx + C} = Ce^{-\int P(x)dx}$

- Splošna rešitev prirejene homogene je sestavljena iz posebne rešitve $z_1 = e^{-\int P(x)dx}$ in konstante C . Torej $z = C \cdot z_1$

- **Splošna rešitev nehomogene linearne diferencialne enačbe prvega reda je vsota splošne rešitve homogene enačbe in posebne rešitve nehomogene enačbe:**

$$y = z + y_1 = C \cdot z_1 + y_1.$$

Partikularno rešitev y_1 izračunamo s metodo variacije konstante: konstanto C nadomestimo s funkcijo $C(x)$.

- Torej $y_1 = C(x) \cdot z_1$
- Vstavimo v začetno diferencialno enačbo:

$$C'(x) \cdot z_1 + C(x) \cdot z_1' + P(x)C(x) \cdot z_1 = Q(x)$$

$$C'(x) \cdot z_1 + C(x) \cdot \underbrace{[z_1' + P(x) \cdot z_1]}_{=0} = Q(x)$$

rešitev prirejene homogene

$$C'(x) = \frac{Q(x)}{z_1} \text{ in } C(x) = \int \frac{Q(x)}{z_1} dx$$

– Torej $y_1 = \left[\int \frac{Q(x)}{z_1} dx \right] \cdot z_1$

$$y = C \cdot e^{-\int P(x) dx} + \left[\int \frac{Q(x)}{z_1} dx \right] \cdot e^{-\int P(x) dx}$$

11. Rešite naslednje linearne diferencialne enačbe prvega reda.

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{1}{x}\right)y = 3x + 4$$

$$\frac{dy}{dx} + \left(\frac{2}{x}\right)y = 3x + 1$$

$$y' - y = \cos x$$

$$y' + 2xy = 2x$$

$$(3y + \sin 2x) dx - dy = 0$$

$$(y - 1)\sin x dx - dy = 0$$

$$(x - 1)y' + y = x^2 - 1$$

$$y' + 5y = e^{5x}$$

12. Rešite naslednje linearne diferencialne enačbe prvega reda; določite partikularno rešitev, ki upošteva začetne oziroma robne pogoje.

<u>Differential Equation</u>	<u>Initial Condition</u>
------------------------------	--------------------------

$\frac{dy}{dx} = e^x - y$	$(0, 1)$
---------------------------	----------

$y' + 2y = \sin x$	$(0, 4)$
--------------------	----------

<u>Differential Equation</u>	<u>Boundary Condition</u>
------------------------------	---------------------------

$y' \cos^2 x + y - 1 = 0$	$y(0) = 5$
---------------------------	------------

$x^3 y' + 2y = e^{1/x^2}$	$y(1) = e$
---------------------------	------------

$y' + y \tan x = \sec x + \cos x$	$y(0) = 1$
-----------------------------------	------------

$y' + y \sec x = \sec x$	$y(0) = 4$
--------------------------	------------

$y' + \left(\frac{1}{x}\right)y = 0$	$y(2) = 2$
--------------------------------------	------------

$y' + (2x - 1)y = 0$	$y(1) = 2$
----------------------	------------

<u>Differential Equation</u>	<u>Points</u>
$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{x}y = x^2$	$(-2, 4), (2, 8)$
$\frac{dy}{dx} + 2xy = x^3$	$(0, \frac{7}{2}), (0, -\frac{1}{2})$
$\frac{dy}{dx} + (\cot x)y = x$	$(1, 1), (3, -1)$
$\frac{dy}{dx} + 2xy = xy^2$	$(0, 3), (0, 1)$

Praktični primer uporabe – Hujšanje

Osebna teža je odvisna od vnesenih in uporabljenih kalorij (energije). Poraba energije je odvisna od teže posameznika, v povprečju oseba porabi 35 kalorij za kg teže na dan. Prevmemo, da v povprečju, oseba zaužije 3500 kalorij (1 cal=4.19 J) na dan.

Enačba, ki se lahko uporabi za oblikovanje izgube teže je (predpostavimo, da je osebna raven aktivnosti konstantna):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{C}{3500} - \frac{35}{3500}W$$

pri čemer je W osebna teža (v kg), t čas v dnevih in C je stalni dnevni vnos kalorij.

- 1] Poiščite splošno rešitev diferencialne enačbe.
- 2] Oseba, ki tehta 90 kg in se prehranjuje z 2500 kalorij na dan želi shujšati. Kako dolgo bo trajalo hujšanje, da izgubiti 5 kg?
- 3] Kako dolgo bo trajalo hujšanje osebe, ki želi izgubiti 17.5 kg?
- 4] Grafično predstavite rešitev. Kako se telesna teža obnaša?

13. Dodatne vaje.

<u>Differential Equation</u>	<u>Solution</u>
$y' - 2x = 0$	(a) $y = Ce^{x^2}$
$y' - 2y = 0$	(b) $y = -\frac{1}{2} + Ce^{x^2}$
$y' - 2xy = 0$	(c) $y = x^2 + C$
$y' - 2xy = x$	(d) $y = Ce^{2x}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{y(y+2)}$$

$$(1+y^2)dx + (2xy+y+2)dy = 0$$

$$(1+2e^{2x+y})dx + e^{2x+y}dy = 0$$

$$y \cos x - \cos x + \frac{dy}{dx} = 0$$

$$(x+1)\frac{dy}{dx} = e^x - y$$

$$(x^2 + \cos y)\frac{dy}{dx} = -2xy$$

$$y' = 2x\sqrt{1-y^2}$$

$$(3y^2 + 4xy)dx + (2xy + x^2)dy = 0$$

$$(x+y)dx - xdy = 0$$

$$(2y - e^x)dx + xdy = 0$$

$$(y^2 + xy)dx - x^2dy = 0$$

$$(x^2y^4 - 1)dx + x^3y^3dy = 0$$

$$ydx + (3x + 4y)dy = 0$$

$$3ydx - (x^2 + 3x + y^2)dy = 0$$

$$x dx + (y + e^y)(x^2 + 1)dy = 0$$