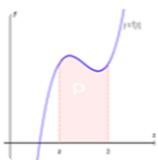


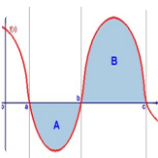
DOLOČENI INTEGRAL

Določen integral se uporablja za izračun ploščine krivočrtnega lika, ki ga na izbranem intervalu omejujeta nenegativna zvezna funkcija in abscisna os.



Osnovni izrek infinitezimalnega računa - Newton-Leibnizeva formula (Povezuje določeni in nedoločeni integral):

Ploščino lika omenjenga z grafom pozitivne funkcije $f(x)$ in navpični premici $x=a$ in $x=b$, izračunamo tako, da najprej z nedoločenim integralom izračunamo primitivno funkcijo $F(x)$, potem pa vanjo vstavimo meji intervala: $p = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.



V primeru, ko funkcija ni vedno pozitivna, določeni integral ni ploščina lika. Določeni integral med a in b je negativen. Ploščina A je absolutna vrednost določenega integrala.

Za poljubne integrabilne funkcije $f(x)$ in $g(x)$ na zaprtem intervalu $[a, b]$ določeni integral ima naslednje lastnosti:

a.
$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

b.
$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx.$$

c.
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

in velja $a \leq c \leq b$

d.
$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx.$$

e.
$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

Izrek o povprečni vrednosti:

f.
$$\int_a^b f(x) dx = f(\alpha)(b-a).$$

in velja $a \leq \alpha \leq b$

1. Izračunajte naslednje določene integrale:

$$\int_0^4 (1 + x + e^{x/4}) \, dx.$$

$$\int_{-2}^2 x \sqrt{9 - x^2} \, dx.$$

$$\int_0^2 (3x^2 - 4) \cos(x^3 - 4x) \, dx.$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^3 (x + 1) \, dx$$

$$\int_1^2 \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right) \, dx$$

$$\int_0^1 (\sqrt[3]{x} - x) \, dx$$

$$\int_0^2 x(x^2 - 1)^2 \, dx$$

$$\int_{-1}^0 \frac{x^3}{x^4 + 1} \, dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + x^2} \, dx$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 + 4x^2} \, dx$$

$$\int_{-1}^1 e^{3x} \, dx$$

$$\int_1^3 \frac{4x+3}{2x^2+3x} \, dx$$

2. Določite srednjo vrednost naslednjih funkcij v označenem intervalu. Nato določite točko na intervalu, kjer funkcija prevzame to vrednost.

a) $y = x^3$ $[0,2]$

b) $y = \frac{1}{x}$ $[1,2]$

c) $y = 4 - x^2$ $[1,2]$

3. Narišite vsako funkcijo na označenem intervalu in določite ploščino nastalega lika.

a) $y = 2x^2$ $[0,3]$

b) $y = \sqrt{x}$ $[0,16]$

c) $y = -x^2 + 9$ $[0,3]$

d) $y = x^2 - 9$ $[0,2]$

e) $y = -x^2 + 4$ $[-1,3]$

4. Narišite vsak par funkcij v pravokotnem koordinatnem sistemu in določite ploščino omejenega lika.

a) $p) y = x^2 + 1$ $p') y = -x^2 + 4x + 1$

b) $p) y = x^2 - 3$ $p') y = 1 - x^2$

5.

Izračunajmo ploščino lika omejenega s krivuljami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ in $y = x - 2$

Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y = 4 - x^2$ in $y = x^2 - 2x$.

Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje $y = x$, $y = 2 - x$ in $y = x - \frac{x^2}{2}$.

Ločna dolžina krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Izračunajte ločno dolžino krivulje $y = x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1/4$.

Izračunajte ločno dolžino krivulje $y = \frac{x^2}{8} - \ln x$, $1 \leq x \leq 2$.

Prostornina in površina vrtenine. Če krivuljo $y = f(x)$, kjer je $f(x) \geq 0$, na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli osi x , se prostornina dane vrtenine izraža po formuli:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx,$$

površina pa je vsota površin plašča (S_{pl}) in obeh pokrovov (S_{o}), kjer je:

$$S_{\text{pl}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad S_{\text{o}} = \pi(f(a))^2 + \pi(f(b))^2.$$

Izračunajte prostornino in površino vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 8$, zavrtimo okoli osi x .

Izračunajte prostornino in površino vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo $y = x^3/3$, $0 \leq x \leq 3$, zavrtimo okoli osi x .