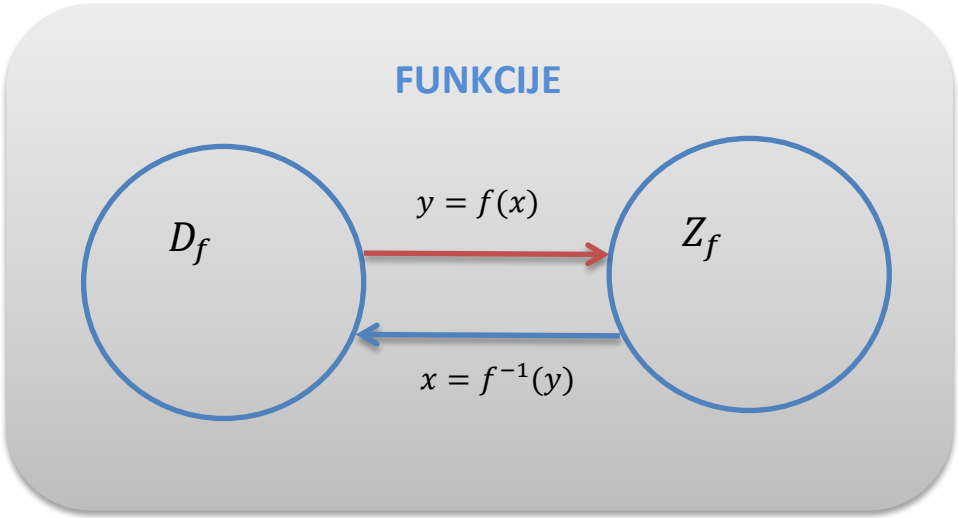


Pregled elementarnih funkcij

Osnovne funkcije

Absolutna vrednost: oddaljenost od izhodišča.

Konstantna funkcija: vrednost funkcije se ne spreminja, ne glede na argument, če ta obstaja.

Druge

Elementarne algebrske funkcije

Linearna funkcija:

je oblike $f(x) = ax + b$.

Kvadratna funkcija: je oblike $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Polinomske funkcije: nastanejo samo s seštevanjem in množenjem.

Potenčna funkcija:

je oblike $f(x) = x^n$ kjer je potenca realno število.

Korenska funkcija:

je oblike $f(x) = \sqrt[x]{x}$

Elementarne transcendentne funkcije

Eksponentna funkcija:

je oblike $f(x) = a^x$.

Logaritemska funkcija: je oblike $f(x) = \log_a x$.

Trigonometrične funkcije: $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{tg}\, x$, ...

Krožne funkcije:

inverzi trigonometričnih funkcij, $\mathrm{Arcsin}\, x$, $\mathrm{Arccos}\, x$, $\mathrm{Arctg}\, x$, ...

Hiperbolične funkcije:

po obliki podobne trigonometričnim funkcijam,

$\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\mathrm{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\mathrm{th}\, x = \frac{e^x - e^{-}}{e^x + e^{-}}$

1. Določite definicijsko območje D_f in zalogo vrednosti Z_f naslednjim funkcijam:

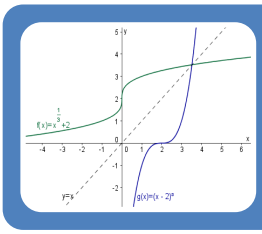
(a) $f(x) = \frac{2x}{x^2-4}$. R: $\mathbb{R} \setminus \{2, -2\}$

(b) $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$. R: $[-4, 4]$

(c) $f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$. R: $(-2, 2)$

(d) $f(x) = \sqrt{\ln \frac{5x-x^2}{4}}$. R: $[1, 4]$

2. Določite inverzno funkcijo:



Inverzna funkcija $x=f^{-1}(y)$

- $x \leftrightarrow y$
- izrazimo y
- graf je preslikava grafa osnovne funkcije preko simetrale lihih kvadrantov

(a) $y = \frac{4x-5}{x-3}$. R: $y = \frac{3x-5}{x-4}$

(b) $y = e^{3x} - 7$ R: $y = \frac{1}{3} \ln(x + 7)$

3. S pomočjo inverzne funkcije narišite naslednje funkcije.

$y = \sqrt{x+1}$

$y = \sqrt{-x+1}$

4. Izračunajte naslednje limite funkcij:

1. $\lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}$. R: -4
2. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-1}{x-1}$. R: 3
3. $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1}$. R: 2
4. $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+4x}{3x^2+5x}$. R: $\frac{4}{5}$
5. $\lim_{x\to 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$. R: $\frac{-1}{3}$
6. $\lim_{x\to 1} \frac{x^5-1}{x-1}$. R: $\frac{5}{4}$
7. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-x^2-x+1}{x^3+x^2-x-1}$. R: 0

11. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^2-2x}{2x^2+1}$. R: $\frac{1}{2}$

13. $\lim_{x\to \infty} \frac{2x^3-x^2+1}{3x^3-5x}$. R: $\frac{2}{3}$

15. $\lim_{n\to \infty} \frac{\sqrt{n^2+1}-1}{\sqrt{n^2+1}+1}$. R: 1

5. Dane so funkcije:

(a) $y = -2\,(x-1)^2\,(x+1)$

(b) $y = x^3 - 2x$

(c) $y = x^3 - 2x + 2$

(d) $y = -2x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1$

(e) $y = \frac{(2x-3)^2}{x^2-3x+2}$

(f) $y = \frac{4x^2-4x}{2x-1}$

(g) $y = \frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$

(h) $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

Za vsako določite definicijsko območje, ničle (pole), asimptoto in skicirajte graf.

6. S pomočjo funkcije $f(x) = e^x$ narišite naslednje funkcije.

(a) $f_1(x) = -\frac{1}{2}e^x$

(b) $f_2(x) = e^{2x}$

(c) $f_3(x) = e^{x-1}$

7. S pomočjo funkcije $f(x) = \ln x$ narišite naslednje funkcije.

(a) $f_1(x) = f(x) + 2$

(b) $f_2(x) = |f(x)|$

(c) $f_3(x) = \ln|x|$

8. Izračunajte naslednje odvode.

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, R: $-\frac{1}{x^2}$
2. $f(x) = \sin x$, R: $\cos x$
3. $f(x) = 3x^2$, R: $6x$
4. $f(x) = 2x - 3$, R: 2

1. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$, R: $6x^2 - 6x$
2. $f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$, R: $x^2 - x^3$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$, R: $\frac{2}{(x+1)^2}$
4. $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}$, R: $\frac{-2x^2+2}{(x^2-x+1)^2}$
5. $f(x) = 2\sqrt{x}$, R: $\frac{1}{\sqrt{x}}$
6. $f(x) = x\sqrt{x}$, R: $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$
7. $f(x) = e^x(x^2 - 2x + 2)$, R: x^2e^x
8. $f(x) = x \sin x$, R: $\sin x + x \cos x$
9. $f(x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$, R: $x^2 \cos x$
10. $f(x) = x \ln x - x$, R: $\ln x$
11. $f(x) = \frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9}$, R: $x^2 \ln x$
12. $f(x) = 2 \sin 6x$, R: $12 \cos 6x$

9. Dodatne vaje.

$y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + 5x + 9$	$[x + x^2 + 5]$
$y = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$	$[6x^2 + 18x + 7]$
$y = (x^2 - 1)(5x + 2)$	$[15x^2 + 4x - 5]$
$y = (x^2 + 1)^5$	$[10x(x^2 + 1)^4]$
$y = \frac{5x^3}{4} - \frac{7x^2}{2} - \frac{3x}{5} + 9$	$\left[\frac{15}{4}x^2 - 7x - \frac{3}{5}\right]$
$y = x(x - 1)^3$	$[-(2x + 1)(x - 1)^2]$
$y = (1 + x^2)(2x - 5)$	$[6x^2 - 10x + 2]$
$y = (2x - 1)^2(3 - 7x)^5$	$[(2x - 1)(3 - 7x)^4(-98x + 47)]$
$y = (2x + 3)(x^2 + 3x - 1)$	$[6x^2 + 18x + 7]$
$y = (1 - 2x^2)(3x + 1)$	$[-18x^2 - 4x + 3]$

$y = (1 - 3x)^4(1 + x)$	$[(11 + 15x)(3x - 1)^3]$
$y = (2 - x)^2(x^3 + 2x)$	$[(2 - x)(-5x^3 + 6x^2 - 6x + 4)]$
$y = (x - 2)^3(x + 1)^2$	$[(x + 1)(x - 2)^2(5x - 1)]$
$y = (x^2 + x + 1)^3(x - 1)^4$	$[(x^2 + x + 1)^2(x - 1)^3(10x^2 + x + 1)]$
$y = (x^6 + 1)(3x + 1)^8$	$[6(3x + 1)^7(7x^6 + x^5 + 4)]$
$y = (x^2 + 2x - 3)^3(4 - x^2)^7$	$[2(12 + 33x - 17x^2 - 10x^3)(x^2 + 2x - 3)^2(4 - x^2)^6]$
$y = 2(x + 2)^2(x^2 + 4x - 3)$	$[4(x + 2)(2x^2 + 8x + 1)]$
$y = x^2(x^4 + 1)^3 + 3x(x^2 + 1)]$	$[2x(x^4 + 1)^2(7x^4 + 1) + 3(3x^2 + 1)]$

$y=\dfrac{(1-x)^2}{x}$ $\left[\dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}\right]$

$y=\dfrac{3x^2-5}{x^2-1}$ $\left[\dfrac{4x}{(x^2-1)^2}\right]$

$y=\dfrac{4x^2-5x+3}{x^2-6x+5}$ $\left[-\dfrac{19x^2-34x+7}{(x^2-6x+5)^2}\right]$

$y=\dfrac{3x^2-2x+3}{x^2-2x-1}$ $\left[-\dfrac{4(x^2+3x-2)}{(x^2-2x-1)^2}\right]$

$y=\dfrac{1}{x}$ $\left[-\dfrac{1}{x^2}\right]$

$y=\dfrac{8x+x^5}{x+1}$ $\left[\dfrac{4x^5+5x^4+8}{(x+1)^2}\right]$

$y=\dfrac{4x^2-5}{x+1}$ $\left[\dfrac{4x^2+8x+5}{(x+1)^2}\right]$

$y=2x-\dfrac{x}{x^2+1}$ $\left[\dfrac{2x^4+5x^2+1}{(x^2+1)^2}\right]$

$y=\left(2x+\dfrac{5}{x}\right)^3$ $\left[3\left(2x+\dfrac{5}{x}\right)^2\left(2-\dfrac{5}{x^2}\right)\right]$

$y=\left(x-1-\dfrac{3}{x}\right)^4$ $\left[4\left(x-1-\dfrac{3}{x}\right)^3\left(1+\dfrac{3}{x^2}\right)\right]$

$y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ $\left[\dfrac{16x}{(x^2+4)^2}\right]$

$y=\sqrt{x^2+2}$ $\left[\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}\right]$

$y=\sqrt{4x^2-3}$ $\left[\frac{4x}{\sqrt{4x^2-3}}\right]$

$y=\sqrt{x^3-4x+2}$ $\left[\frac{3x^2-4}{2\sqrt{x^3-4x+2}}\right]$

$y=\sqrt{x^4+x^2-2x}$ $\left[\frac{2x^3+x-1}{\sqrt{x^4+x^2-2x}}\right]$

$y=2\sqrt{x}+2x+1$ $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right]$

$y=\left(x^2+2\sqrt{x}\right)^5$ $\left[5\left(x^2+2\sqrt{x}\right)^4\left(2x+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]$

$y=2\sqrt{x^3}-\frac{7}{\sqrt[7]{x}}+4\sqrt[4]{x^3}$ $\left[3\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[7]{x^8}}+\frac{3}{\sqrt[4]{x}}\right]$

$y=\sqrt[4]{x}-\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ $\left[\frac{\sqrt{x}+1}{4x\sqrt[4]{x}}\right]$

$y=x^7-3\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ $\left[7x^6-\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}\right]$

$y=\left(15x^2-12x+8\right)\sqrt{(x+1)^3}$ $\left[\frac{105}{2}x^2\sqrt{x+1}\right]$

$y=\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2}x^2+\sqrt[5]{x^3}\right)^2$ $\left[2\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{2}x^2+\sqrt[5]{x^3}\right)\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}-x+\frac{3}{5\sqrt[5]{x^2}}\right)\right]$

$y=\frac{x-\sqrt{x^2+4}}{7x+1}$ $\left[\frac{\sqrt{x^2+4}-x+28}{(7x+1)^2\sqrt{x^2+4}}\right]$

$y=\frac{\sqrt{2-x^2}+x}{3+x}$ $\left[\frac{-3x-2+3\sqrt{2-x^2}}{(3+x)^2\sqrt{2-x^2}}\right]$

$y = \frac{lnx - 1}{lnx + 1}$	$\left[\frac{2}{x(lnx+1)^2}\right]$
$y = x^3e^x + e^x - 1$	$[e^x(x^3 + 3x^2 + 1)]$
$y = e^x(2 - e^x)$	$[2e^x(1 - e^x)]$
$y = e^x(x^3 - x + 7)$	$[e^x(x^3 + 3x^2 - x + 6)]$
$y = xln^3x - 3xln^2x + 6xlnx - 6x$	$[ln^3x]$
$y = x^2(lnx)^3$	$[x(lnx)^2(2lnx + 3)]$
$y = 5xln^2x - 6x^3ln^5x$	$[-18x^2ln^5x - 30x^2ln^4x + 5ln^2x + 10lnx]$
$y = \frac{1}{x} \cdot lnx$	$\left[\frac{1}{x^2}(1-lnx)\right]$
$y = (xlnx - 1)^2$	$[2(xlnx - 1)(lnx + 1)]$
$y = 3xlnx$	$[3(lnx + 1)]$
$y = x^2lnx$	$[x(2lnx + 1)]$
$y = ln\sqrt[5]{x^2+4}$	$\left[\frac{2x}{5(x^2+4)}\right]$
$y = ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}$	$\left[\frac{1}{x^3(x+1)}\right]$
$y = ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$	$\left[-\frac{1}{x(x-1)}\right]$
$y = ln(x^3 + x^2 + 8)$	$\left[\frac{3x^2+2x}{x^3+x^2+8}\right]$
$y = ln\sqrt[3]{4x^2+5x-1}$	$\left[\frac{8x+5}{3(4x^2+5x-1)}\right]$

$y = \frac{lnx}{1+lnx}$ $\left[\frac{1}{x(1+lnx)}\right]$

$y = ln(lnx)$ $\left[\frac{1}{xlnx}\right]$

$y = ln(e^x - 2)$ $\left[\frac{e^x}{e^x - 2}\right]$

$y = ln\left(5e^x\sqrt{x^2-1}\right)$ $\left[\frac{x^2+x-1}{x^2-1}\right]$

$y = \frac{1}{2}ln(x^2-1)+x$ $\left[\frac{x^2+x-1}{x^2-1}\right]$

10. Dane so funkcije:

(a) $y = -2\,(x-1)^2\,(x+1)$

(b) $y = x^3 - 2x$

(c) $y = x^3 - 2x + 2$

(d) $y = -2x^4 + x^3 + 3x^2 - x - 1$

(e) $y = \frac{(2x-3)^2}{x^2-3x+2}$

(f) $y = \frac{4x^2-4x}{2x-1}$

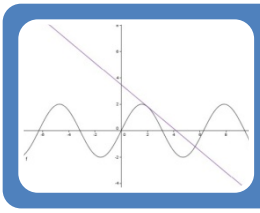
(g) $y = \frac{x(x-2)^2}{x^2+1}$

(h) $y = \frac{x^2-1}{x^2-3x+2}$

Narišite natančni graf z uporabo odvoda.

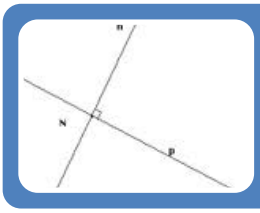
11. Uporaba L'Hospitalovega pravila.

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x}$, R: 0
2. $\lim_{x\to 0} x \ln x$, R: 0
3. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$, R: $\frac{1}{2}$
4. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x - \sin x}$, R: 3
5. $\lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3}$, R: $-\frac{1}{3}$

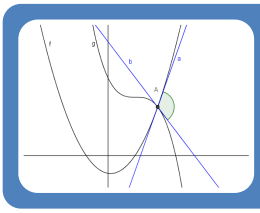


Smerni koeficient tangente na krivuljo $y = f(x)$ v točki $T(x_0, y_0)$ je $k_t = f'(x_0)$.

- Naklonski kot tangente je $\alpha = arctg(k_t)$.



Smerni koeficient normale na krivuljo $y = f(x)$ v točki $T(x_0, y_0)$ je $k_n = -\frac{1}{k_t}$.



Kot med premico l_1 z enačbo $y = k_1x + n_1$ in premico l_2 z enačbo $y = k_2x + n_2$ lahko izračunamo s pomočjo formule $tg\gamma = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}$.

1. Zapiši enačbo tangente na krivuljo $y = x^3 - 3x^2 + 9x - 1$ v točki $x_0 = 1$. R: $y = 6x$
2. V kateri točki krivulje $y = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$ oklepa tangenta z osjo x kot $\frac{\pi}{4}$? R: $T_1(1, 1)$, $T_2(3, -1)$
3. Pokaži, da se krivulji $y = x - x^2$ in $y = x^2 - x$ sekata pravokotno.
4. Poišči enačbo tangente in enačbo normale za funkcijo $y = \arcsin\frac{x-1}{2}$ v sečišču z abscisno osjo. R: $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $y = -2x + 2$

1. Zapiši enačbo tangente na polinom $p(x) = x^3 - 3x^2 + 2x - 2$, ki je vzporedna premici x + y = 0. Izračunaj tudi dotikališče.
(T(1,-2) ; x +y +1 = 0)

2.Izračunaj stacionarne točke funkcije $f(x) = \frac{-x^2}{x-1}$.
(A(0,0) min., B(2,-4) maks.)

3.Dana je funkcija $f(x) = (x + a)^2$. Izračunaj a tako, da bo f(2) =1 in $f'(2) < 0$.
(a = -3)

4. Premica se dotika krivulje z enačbo $y = x^3 + 1$ v točki A in jo seka v točki B. Točka A leži na abcisni osi in je različna od točke B. Izračunaj koordinati točk A in B.
(A-1,0), B(2,9))

5. Izračunaj kot, pod katerim funkcija f(x) = ln(3x – 5) seka abscisno os. Rezultat zaokroži na stotinko stopinje natančno.
(71,57°)