

NEDOLOČENI INTEGRAL

Nedoločeni integral dane funkcije $f(x)$ je funkcija $F(x)$, katere odvod je enak dani funkciji $f(x)$. V tem smislu je integriranje obratna operacija kot odvajanje. Rezultat nedoločenega integrala imenujemo primitivna funkcija.

$$\int f(x)dx = F(x) + c \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

Tabela elementarnih integralov:

Integrali potenčnih funkcij:	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$ $\int (ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$
Integrali trigonometrijskih funkcij	$\int \sin x dx = -\cos x + C$ $\int \cos x dx = \sin x + C$ $\int \tan x dx = -\ln \cos x + C$ $\int \cot x dx = \ln \sin x + C$ $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$ $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
Integrali eksponentnih in logaritemskih funkcij	$\int e^x dx = e^x + C$ $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$ $\int \ln x dx = x \ln x - x + C$
Integrali iracionalnih funkcij	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$ $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{2} \left[x\sqrt{a^2 + x^2} + a^2 \ln \left(x + \sqrt{a^2 + x^2} \right) \right] + C$ $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right) + C$
Integrali racionalnih funkcij	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$ $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{Artanh} \frac{x}{a} + C$ $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = -\frac{1}{a} \operatorname{Arcoth} \frac{x}{a} + C$

Osnovna pravila integriranja:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx \quad (a \text{ constant})$$

$$\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$$

$$\int [f(x)]^n f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + C \quad (\text{for } n \neq -1)$$

$$\int f'(x) f(x) dx = \frac{1}{2} [f(x)]^2 + C$$

Integracijske metode:

Metode za izračun integrala slonijo na določanju primitivne. Osnovni prijemi za računanje primitivnih funkcij so:

- uporaba tabele elementarnih integralov in pravila integriranja (posledica pravil za odvajanje)

$$\int (4x^4 + 3x^2 + 5x) dx$$

$$\int (1 + 2x^3)^2 dx$$

$$\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx.$$

$$\int \frac{x^2 - \sqrt{x}}{x^3} dx.$$

- Preoblikovanje funkcije z uvedbo nove spremenljivke (substitucija)

FORMULA ZA SUBSTITUCIJO V NEDOLOČENEM INTEGRALU

Uvedemo novo spremenljivko t za katero velja:

$$x = u(t) \text{ in } dx = u'(t)dt$$

$$\int f(x)dx = \int f(u(t))dt$$

$$\int \frac{x^2}{x-3} dx.$$

$$\int \frac{x^2+3}{2+3x} dx.$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x-1}} dx.$$

$$\int e^{2x+3} dx.$$

$$\int \frac{\log^3 x}{x} dx$$

$$\int x^2 e^{x^3} dx$$

$$\int \frac{dx}{x \log^3 x}$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^8} dx$$

$$\int \frac{1+\cos x}{x+\sin x} dx$$

$$\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x} dx.$$

$$\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

- Metoda integracije po delih (Per Partes)

FORMULA ZA INTEGRACIJO PO DELIH ZA NEDOLOČENI INTEGRAL

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

ali enakovredno

$$\int f(x)dg(x) = f(x)g(x) - \int g(x)df(x)$$

$$\int x \sin(2x) \, dx.$$

$$\int (x^2 + 2x)e^{-x} \, dx.$$

$$\int (x^2 - 3) \ln x \, dx.$$

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx.$$

$$\int \arcsin x \, dx.$$

Dodatne vaje:

1.

$$(a) \quad \int \cos^5 x \sin x \, dx \qquad \left[-\frac{1}{6} \cos^6 x + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(b) \quad \int x^3 \sin x^4 \, dx \qquad \left[-\frac{1}{4} \cos x^4 + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(c) \quad \int e^{\sin x} \cos x \, dx \qquad \left[e^{\sin x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(d) \quad \int x^2 e^{x^3} \, dx \qquad \left[\frac{1}{3} e^{x^3} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(e) \quad \int \tan x \, dx \qquad [-\log |\cos x| + c, \quad c \in \mathbb{R}]$$

$$(f) \quad \int \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 2}{x + 1} \, dx \qquad \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 2x + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(g) \quad \int \frac{2x^4 - 2x^3 + x^2 + 4x - 5}{x - 1} \, dx \qquad \left[\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(h) \quad \int \frac{x^3 + x^2 + 1}{x - 1} \, dx \qquad \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + 2x + 3 \log |x - 1| + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(i) \quad \int \frac{3x^3 - 3}{x - 1} \, dx. \qquad \left[x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

2.

$$(a) \quad \int \frac{\log^3 x}{x} dx \qquad \left[\frac{1}{4} \log^4 x + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(b) \quad \int \frac{\cos(\log x)}{x} dx \qquad \left[\sin(\log x) + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(c) \quad \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \qquad \left[2 \sin \sqrt{x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(d) \quad \int \frac{\log x}{x \sqrt{4 + 3 \log^2 x}} dx \qquad \left[\frac{1}{3} \sqrt{4 + 3 \log^2 x} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(f) \quad \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx. \qquad \left[2e^{\sqrt{x}} + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

3.

$$(a) \quad \int x e^x dx \qquad [e^x(x - 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}]$$

$$(b) \quad \int x e^{-x} dx \qquad [-e^{-x}(x + 1) + c, \quad c \in \mathbb{R}]$$

$$(c) \quad \int x^2 e^x dx \quad \left[e^x(x^2 - 2x + 2) + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(d) \quad \int x \arctan(1 + 16x) dx \quad \left[\frac{1}{2}x^2 \arctan(1 + 16x) - \frac{1}{32}x + \frac{1}{512} \log(1 + (1 + 16x)^2) + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(e) \quad \int \arctan x dx \quad \left[x \arctan x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2) + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(f) \quad \int x^2 \log x dx \quad \left[\frac{1}{3}x^3 \log x - \frac{1}{9}x^3 + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(g) \quad \int x^2 \cos x dx \quad \left[x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(h) \quad \int (x + 5) \log x dx \quad \left[\left(\frac{1}{2}x^2 + 5x \right) \log x - \frac{1}{4}x^2 - 5x + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

$$(i) \quad \int \log(x + 5) dx. \quad \left[x \log(x + 5) - x + 5 \log|x + 5| + c, \quad c \in \mathbb{R} \right]$$

4.

$$(a) \int x^3 \operatorname{sh} x dx \quad (b) \int x^3 \sin(x^2) dx \quad (c) \int x^4 \cos(2x) dx$$

$$(d) \int e^{2x} \sin(3x) dx \quad (e) \int e^{-3x} \cos(2x) dx \quad (f) \int \arcsin x dx$$

$$(g) \int x^3 \log x dx \quad (h) \int x^5 e^{-x^3} dx \quad (i) \int \frac{\log x}{\sqrt[4]{x}} dx$$

$$(j) \int \log^2 x dx \quad (k) \int x \sin^2 x dx \quad (l) \int \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) dx.$$

Rešitve 4. sklopa:

$$(a) \int x^3 \operatorname{sh} x \, dx = (x^3 + 6x) \operatorname{ch} x - 3(x^2 + 2) \operatorname{sh} x + c \quad (b) \int x^3 \sin(x^2) \, dx = \frac{-x^2 \cos(x^2) + \sin(x^2)}{2} + c$$

$$(c) \int x^4 \cos(2x) \, dx = \frac{1}{2} \sin(2x) \left(x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}\right) + \cos(2x) \left(x^3 - \frac{3}{2}x\right) + c$$

$$(d) \int e^{2x} \sin(3x) \, dx = \frac{2}{13} e^{2x} \left[\sin(3x) - \frac{3}{2} \cos(3x)\right] \quad (e) \int e^{-3x} \cos(2x) \, dx = -\frac{3}{13} e^{-3x} \left[\cos(2x) - \frac{2}{3} \sin(2x)\right]$$

$$(f) \int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \quad (g) \int x^3 \log x \, dx = \frac{x^4 \log x}{4} - \frac{x^4}{16} + c$$

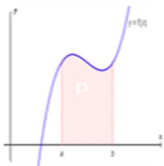
$$(h) \int x^5 e^{-x^3} \, dx = \frac{e^{-x^3}(-x^3 - 1)}{3} + c \quad (i) \int \frac{\log x}{\sqrt[4]{x}} \, dx = \frac{4}{3} x^{3/4} \log x - \frac{16}{9} x^{3/4} + c$$

$$(j) \int \log^2 x \, dx = x(\log^2 x - 2 \log x + 2) + c \quad (k) \int x \sin^2 x \, dx = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{4} x \sin(2x) - \frac{1}{8} \cos(2x) + c$$

$$(l) \int \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) \, dx = x \log(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} + c.$$

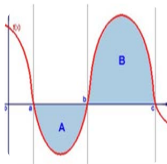
DOLOČENI INTEGRAL

Določeni integral omogoča računanje ploščine lika, omejenega z grafom funkcije.



Osnovni izrek infinitezimalnega računa - Newton-Leibnizeva formula (Povezuje določeni in nedoločeni integral):

Ploščino lika omenjenga z grafom pozitivne funkcije $f(x)$ in navpični premici $x=a$ in $x=b$, izračunamo tako, da najprej z nedoločenim integralom izračunamo primitivno funkcijo $F(x)$, potem pa vanjo vstavimo meji intervala: $p = F(b) - F(a)$.



V primeru, ko funkcija ni vedno pozitivna, določeni integral ni ploščina lika. Določeni integral med a in b je negativen. Ploščina A je absolutna vrednost določenega integrala.

5. Izračunajte naslednje določene integrale:

$$\int_0^4 (1 + x + e^{x/4}) \, dx.$$

$$\int_{-2}^2 x \sqrt{9 - x^2} \, dx.$$

$$\int_0^2 (3x^2 - 4) \cos(x^3 - 4x) \, dx.$$

6.

Izračunajmo ploščino lika omejenega s krivuljami $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ in $y = x - 2$

Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y = 4 - x^2$ in $y = x^2 - 2x$.

Izračunajte ploščino lika, ki ga omejujejo krivulje $y = x$, $y = 2 - x$ in $y = x - \frac{x^2}{2}$.

Ločna dolžina krivulje $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Izračunajte ločno dolžino krivulje $y = x\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 1/4$.

Izračunajte ločno dolžino krivulje $y = \frac{x^2}{8} - \ln x$, $1 \leq x \leq 2$.

Prostornina in površina vrtenine. Če krivuljo $y = f(x)$, kjer je $f(x) \geq 0$, na intervalu $[a, b]$ zavrtimo okoli osi x , se prostornina dane vrtenine izraža po formuli:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx,$$

površina pa je vsota površin plašča (S_{pl}) in obeh pokrovov (S_{o}), kjer je:

$$S_{\text{pl}} = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx, \quad S_{\text{o}} = \pi(f(a))^2 + \pi(f(b))^2.$$

Izračunajte prostornino in površino vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo $y = 2\sqrt{x}$, $0 \leq x \leq 8$, zavrtimo okoli osi x .

Izračunajte prostornino in površino vrtenine, ki jo dobimo, če krivuljo $y = x^3/3$, $0 \leq x \leq 3$, zavrtimo okoli osi x .