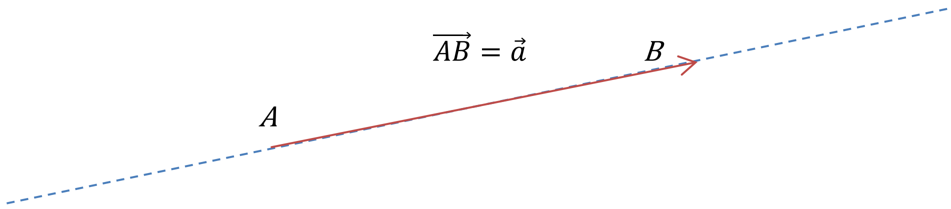
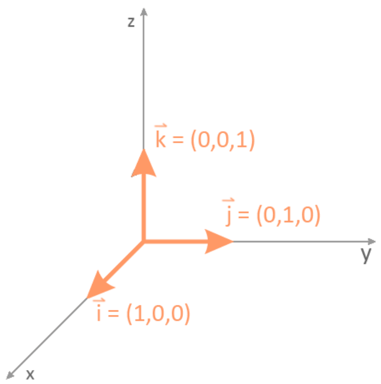
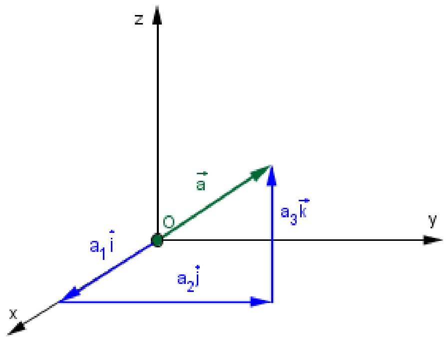
VEKTORJI

Vektorje v matematiki je količina, ki ima poleg velikosti tudi smer. Vektorje v prostoru predstavimo z usmerjenimi daljicami.



Enotski vektorji na koordinatnih oseh:	Komponente vektorja $\vec{a} = (a_i,\ a_j,\ a_k)$
	

Krajevni vektor sega od izhodišča koordinatnega sistema do izbrane točke.

Krajevni vektor točke A označimo $\overrightarrow{\mathrm{r}_{\mathrm{A}}}$.

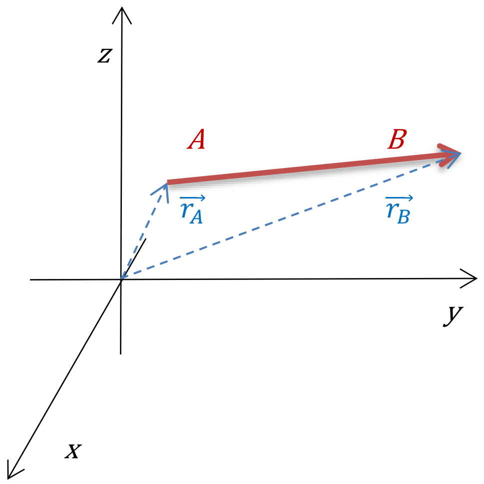
Krajevni vektor točke A ima enake koordinate kot točka A

$$\overrightarrow{\mathrm{r}_{\mathrm{A}}} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3) \Leftrightarrow \mathrm{A}(\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3)$$

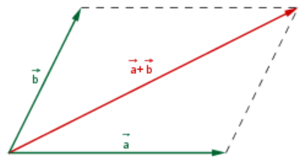
$$\overrightarrow{r_A} = (a_1, a_2, a_3) \Leftrightarrow A(a_1, a_2, a_3)$$

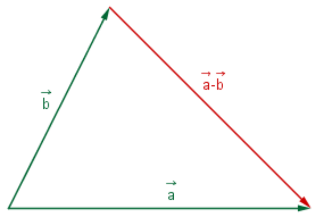
$$\overrightarrow{r_B} = (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow B(b_1, b_2, b_3)$$

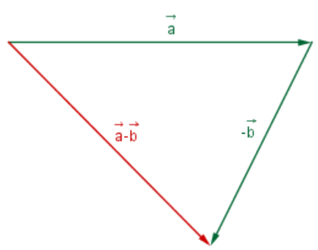
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$



Vsota in razlika vektorjev:

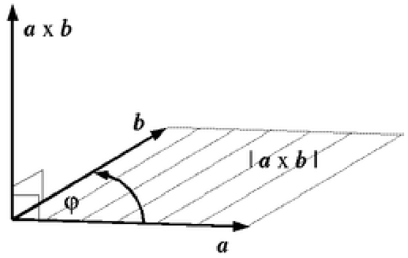






$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = \\ = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) - (b_1, b_2, b_3) = \\ = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$$

Produkt s skalarjem	$m \cdot \vec{a} = (m \cdot a_1, m \cdot a_2, m \cdot a_3)$
Skalarni produkt	$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \cdot (b_1, b_2, b_3) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert \cdot \cos\alpha$
Absolutna vrednost – dolžina vektorja	$\lvert \vec{a} \rvert = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{(a_1, a_2, a_3) \cdot (a_1, a_2, a_3)} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2}$
Vektorski produkt  	$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) \times (b_1, b_2, b_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$ $\lvert \vec{a} \times \vec{b} \rvert = \lvert \vec{a} \rvert \cdot \lvert \vec{b} \rvert \cdot \sin\alpha$
Mešani produkt	$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = c_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$

Osnove operacije:

V kartezičnem koordinatnem sistemu so dane točke $A(1,0,-1)$, $B(0,2,1)$ in $C(-3,0-1)$.

(a) Zapišite krajevne vektorje točk A, B in C.

(b) Poiščite koordinate vektorjev $\vec{AB}, \vec{BA}, \vec{AC}$ in $\vec{CB}$.

(c) Izračunajte razdaljo med točkama A in B ter dolžino vektorja $\vec{AB}$.

(d) Izračunajte razdaljo med točkama A in C ter dolžino vektorja $\vec{AC}$.

(e) Zapišite enotski vektor v smeri vektorja $\vec{AB}$.

(f) Zapišite enotski vektor v smeri vektorja $\vec{CA}$.

(g) Zapišite vektor dolžine 5 v smeri vektorja $\vec{AB}$.

(h) Zapišite vektor dolžine 7 v nasprotni smeri vektorja $\vec{BC}$.

Dane so točke $A(-2,-1,0), B(0,1,2), C(20,202,2)$ in $D(22,200,0)$. Poiščite koordinate vektorja $\vec{a} = 2\vec{AB} + \vec{CD}$ in izračunajte njegovo dolžino.

Dana sta vektorja $\vec{a} = (0,1,0)$ in $\vec{b} = (1,0,-1)$. Izračunajte dolžino vektorja $3\vec{a} - 2\vec{b}$.

Na osi x poiščite točko, enako oddaljeno od točk $A(1,2,4)$ in $B(5,-3,2)$.

Dani sta točki $A(3,3,3)$ in $B(0,6,9)$. Poiščite koordinate točk C in D, ki daljico AB razdelita na 3 enake dele.

Izračunajte obseg trikotnika z oglišči $A(-1,0,1), B(2,3,4)$ in $C(-2,1,2)$.

Dane so točke $A(-1,0,2), B(2,1,2)$ in $C(4,-3,3)$. Določite koordinate točke D tako, da bo $ABCD$ paralelogram. Izračunajte obseg in dolžini diagonal tega paralelograma.

Vektorja $\vec{a} = (-1,2,1)$ in $\vec{b} = (3,2,4)$ določata paralelogram. Izračunajte dolžini diagonal tega paralelograma.

Opomba: Tako kot trikotnik lahko tudi paralelogram določimo z dvema nevzporednima vektorjema, ki ležita na nevzporednih stranicah paralelograma.

Skalarni produkt:

Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ in $\vec{b} = (19, 20, 21)$.

Izračunajte skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = (3, 4, 7)$ in $\vec{b} = (2, -5, 2)$.

Dana sta vektorja $\vec{a} = (x, 3, 4)$ in $\vec{b} = (4, x, -7)$. Pri kateri vrednosti števila x sta dana vektorja pravokotna?

Izračunajte kot med vektorjema $\vec{a} = (1, 2, 3)$ in $\vec{b} = (6, 4, -2)$.

Izračunajte kote trikotnika, katerega oglišča so v točkah $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 3, 4)$ in $C(-2, 1, 2)$.

Vektorski produkt:

Izračinajte vektorski produkt vektorjev $\vec{a} = (2, 3, 5)$ in $\vec{b} = (1, 2, 1)$.

Poiščite enotski vektor $\vec{v}$, pravokoten na vektorja $\vec{a} = (1, 2, 3)$ in $\vec{b} = (3, 2, 1)$ (to je pravokoten na ravnino, v kateri ležita vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$).

Izračunajte ploščino paralelograma, določenega z vktorjema $\vec{a} = (2, 5, 1)$ in $\vec{b} = (1, 2, -3)$.

Izračunajte ploščino trikotnika, katerega oglišča so v točkah $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 3, 4)$ in $C(-2, 1, 2)$.

Izračunajte ploščino trikotnika z oglišči $A(2, 2, 2), B(4, 0, 3)$ in $C(0, 1, 0)$. Izračunajte še vse višine tega trikotnika.

Mešani produkt:

Izračunajte mešani produkt vektorjev $\vec{a} = (2, -1, -1), \vec{b} = (1, 3, -1)$ in $\vec{c} = (1, 1, 4)$.

Izračunajte volumen paralelepipeda, določenega z vektorji $\vec{a} = (1, -1, 1)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$ in $\vec{c} = (2, 3, 4)$.

Ali so vektorji $\vec{a} = (7, -3, 2)$, $\vec{b} = (3, -7, 8)$ in $\vec{c} = (1, -1, 1)$ koplanarni?

Izračunajte volumen tetraedra z oglišči $A(2,2,2), B(4,3,3), C(4,5,4)$ in $D(5,5,6)$.

Izračunajte volumen tetraedra z oglišči $A(0,0,1), B(2,3,5), C(6,2,3)$ in $D(3,7,2)$. Izračunajte še vse višine tega tetraedra.

Preverite, ali točke $A(5,7,-2), B(3,1,-1), C(9,4,-4)$ in $D(1,5,0)$ ležijo v isti ravnini.

Linearne kombinacije:

Izrazite vektor $\vec{d} = (8,6,4)$ z vektorji $\vec{a} = (1,-2,1), \vec{b} = (3,2,1)$ in $\vec{c} = (1,0,-1)$.

Vektor $\vec{d} = (13, -10, 17)$ zapišite kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a} = (3,1,-1)$, $\vec{b} = (2,-5,7)$ in $\vec{c} = (-1,-3,2)$.

Dodatne vaje – uporaba vektorjev v ravninski geometriji:

1. Daljico AB razdelimo s točkami C, D, E in F na pet enakih delov. Poiščite koordinate preostalih točk, če sta toki C(3,-5,7) in F(-2,4,-8).

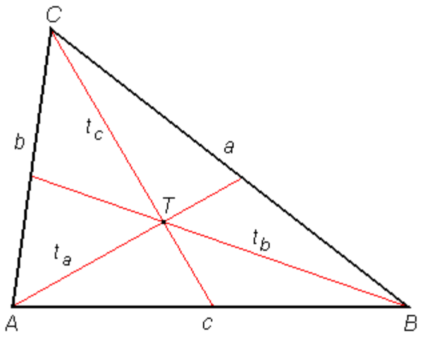
[A(14/3,-8,12), B(-11/3,7,-13), D(4/3,-2,2), E(-1/3,1,-3)]

2. Ali so vektorji $\vec{a} = (1,3,0)$, $\vec{b} = (5,10,0)$, $\vec{c} = (4,-2,6)$ in $\vec{d} = (\frac{21}{2},17,3)$ linearno odvisni. Poišči zvezo!

$[\, 2\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c} - 2\vec{d} = 0 \,]$

3. Točke A(1,2,-3), B(3,0,-1) in C(2,4,5) so oglišča trikotnika ABC. Izračunajte pravokotno projekcijo težiščnice iz oglišča A na stranico AB.

$[\frac{13}{2\sqrt{3}}]$



4. Določite skalar x tako, da bosta vektorja $\vec{a} = 2\vec{i} + x\vec{j} + \vec{k}$ in $\vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}$ pravokotna.

[3]

5. Dani sta točki A(1,1,1) in B(13,4,5). Zapišite enotski vektor, ki leži na AB.

[$\vec{e} = \frac{1}{13}(12,3,4)$]

6. Točke A(3,0,1), B(-1,4,2) in C(5,2,0) so oglišča trikotnika. Izračunajte dolžino težiščnice na AB, določite oglišče D tako, da bo ABCD paralelogram, izračunajte dolžino diagonale BD in velikost kota med diagonalama.

[$t_c = \frac{\sqrt{73}}{2}$, D(13,-2,-1), $|BD| = \sqrt{241}$, φ=65,9º]

7. Dana sta vektorja $\vec{a} = (2,-3,-1)$ in $\vec{b} = (1,4,-2)$. Izračunajte $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b})$.

[(-20,-6,-22)]

8. Točke A(3,-1,4), B(2,-4,2) in C(2,-3,0) so oglišča trikotnika. Izračunajte ploščino, notranje kote, določi D tako da bo ABCD oglišča paralelograma.

[S=√17.25, α=28,9º, β=96,8º, γ=54,1º, D(3,0,2)]

9. V paralelogramu s stranicama a=5cm in b=3cm ter kotom α=36º, leži na stranici DC točka T tako, da razdeli stranico v razmerju $|DT| : |TC| = 1 : 3$. Izračunajte dolžino vektorja AT. V kakšnem razmerju deli presečišče S daljic AT in BD diagonalo BD?

[$|AT| = 4{,}08$, $|AS| : |ST| = 4 : 1$]

10. Pokažite, da je štirikotnik ABCD kvadrat, če sta dana vektorja $\vec{AD}$=(4,2,-4) in $\vec{AB}$=(2,4,4).

11. Izračunajte skalarne produkte, če je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = \sqrt{2}$ in kot med njima $30°$:

a. $(2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - 2\vec{b})$ [$5\sqrt{3}$]

b. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b})$ [0]

c. $\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}\right)$, pri čemer je $\vec{c}$ nasproten vektorju $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ [0]

12. Izračunajte $\left(\vec{a}+2\vec{b}\right)\cdot\left(3\vec{a}-4\vec{b}\right)$, če je $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=3$ in $\vec{a}\cdot\vec{b}=7$.

[-10]

13. Izračunajte $\vec{a}\cdot\vec{b}$, če je $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$, $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=7$ in $|\vec{c}|=11$.

[47]

14. Izračunajte $\left(\vec{a}+3\vec{b}+4\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+3\vec{b}-4\vec{c}\right)$, če je $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, $|\vec{c}|=5$ in $\vec{a}\perp\vec{b}$.

[-247]

15. Izračunajte $\left(\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\right)\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right)$, če je $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{c}|=3$ in sta $\vec{b}$ in $\vec{c}$ enako usmerjena.

[-24]

16. Izračunajte $\left(\vec{a}+2\vec{b}+3\vec{c}\right)\cdot\left(-\vec{a}+3\vec{b}-2\vec{c}\right)$, če je $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=|\vec{c}|=2$, $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta nasprotno usmerjena in $\vec{c}\perp\left(\vec{a}-\vec{b}\right)$.

[-15]

Dodatne vaje vektorji:

1. Dana sta vektorja $\vec{a} = (2, -1, 3)$ in $\vec{b} = (1, -2, 5)$ v običajni bazi $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Zapišite komponente vektorjev $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$ in $\vec{y} = \vec{a} + \vec{b}$. Izračunajte točno dolžino vektorja $\vec{x}$ in skalarni produkt vektorjev $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

2. Izračunajte realno število m, tako da bo dolžina vektorja $\vec{a} = (m-2, 3-m, 2m-12)$ enaka 11.

3. Pravokotnik $ABCD$ ima stranici dolžine $|AB| = 3$ in $|AD| = 4$. Točka E deli stranico AD v razmerju $|AE| : |ED| = 3 : 1$. Izrazite vektorja $\vec{EB}$ in $\vec{EC}$ z vektorjema $\vec{AB} = \vec{a}$ in $\vec{AD} = \vec{b}$ ter izračunajte skalarni produkt $\vec{EB} \cdot \vec{EC}$. Narišite skico.

4. V pravilnem šestkotniku $ABCDEF$ s stranico dolžine 1 označimo $\vec{a} = \vec{AB}$ in $\vec{b} = \vec{AF}$. Izrazite vektorja $\vec{FE}$ in $\vec{FC}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Izračunajte skalarni produkt $\vec{FE} \cdot \vec{FC}$. Narišite skico.

5. Dana sta vektorja $\vec{a} = (2, -1)$ in $\vec{b} = (2, 3)$. Narišite ju in izračunajte kot med njima na stotinko stopinje natančno.

6. Dane so točke $A(0, -1, -1)$, $B(2, -1, 3)$ in $C(3, 1, 0)$. Točka M razpolavlja daljico AB. Določite kot med vektorjema $\vec{MB}$ in $\vec{MC}$.

7. Dana sta vektorja $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$ in $\vec{b} = 5\vec{i} - 2\vec{k}$. Zapišite vektorje $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{a}$ v bazi $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ in izračunajte kot φ, ki ga oklepata vektorja $\vec{v}$ in $\vec{j}$. Kot zaokrožite na stotinko stopinje.

8. V pravokotniku $ABCD$ merita stranici $a = 6$ in $b = 4$. Na stranici DC je točka M tako, da je $|DM| : |MC| = 2 : 1$. Narišite sliko in izračunajte ploščino štirikotnika $ABCM$ ter skalarni produkt $\vec{AB} \cdot \vec{AM}$.

9. Izračunajte, za kateri vrednosti realnega števila x sta vektorja $\vec{a} = (x-2, x, 3)$ in $\vec{b} = (2, x+1, 0)$ pravokotna.

10. Kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ meri $60°$. Skalarni produkt vektrjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je enak 15, skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{a}+\vec{b}$ pa 51. Izračunajte dolžino vektorja $\vec{a}$ in dolžino vektorja $\vec{b}$.

11. Dana sta vektoja $\vec{a} = (2, -1, 3)$ in $\vec{b} = (1, -2, 5)$. Izračunajte njun skalarni produkt. Izračunajte vektor $\vec{x} = 2\vec{a} - \vec{b}$. Izračunajte točno vrednost dolžine vektorja $\vec{x}$.

12. Točke A, B in C so določene s krajevnimi vektorji $\vec{r}_A = \vec{a}$, $\vec{r}_B = \vec{b}$ in $\vec{r}_C = 2\vec{a} + 3\vec{b}$. Z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ izrazite krajevni vektor $\vec{r}_S$ razpolovišča S daljice AB in krajevni vektor $\vec{r}_U$ točke U, ki deli daljico AC v razmerju $|AU| : |UC| = 3 : 2$.

13. Imamo točko $A(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3})$. Točka $M(1, -2, \frac{1}{2})$ je razpolovišče daljice AB. Izračunaj koordinate točke B.

14. V ortonormirani bazi so dani vektorji $\vec{a} = (x, 2, 3)$, $\vec{b} = (1, 0, 3)$ in $\vec{c} = (1, y, 2)$. Določite x in y tako, da bo $\vec{a} \perp \vec{b}$ in $\vec{a} \perp \vec{c}$.

15. Dolžina vektorja $\vec{a}$ je 24, dolžina vektorja $\vec{b}$ je 18, dolžina razlike $\vec{a} - \vec{b}$ pa je 10 enot. Izračunajte dolžino vektorja $\vec{a} + \vec{b}$. Rezultat naj bo točen.

16. Vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ z dolžinami $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 2$ in $|\vec{c}| = 4$ ležijo v ravnini, tako da je kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ $60°$, kot med vektorjema $\vec{c}$ in $\vec{a}$ pa $30°$. Izračunajte natančno vrednost $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$.

17. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $\frac{5\pi}{6}$. Izračunajte $|\vec{a} - \vec{b}|$, če je $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ in $|\vec{b}| = 3$. Razultat naj bo točen.

18. Izračunajte realno število m tako, da bo kot med vektorjema $\vec{i} = (1, 0, 0)$ in $\vec{a} = (m, m + 5, \sqrt{3})$ enak $60°$.

19. Dolžina vektorja $\vec{a}$ je enaka 7, dolžina vektorja $\vec{b}$ pa osem enot. Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ oklepata kot $60°$. Izračunajte kot med vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{a} + \vec{b}$. Rezultat izrazite v stopinjah in minutah.

20. Kolikšen kot oklepata enotska vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, če je vektor $\vec{a}$ pravokoten na vektor $\sqrt{2}\vec{b} - \vec{a}$?

21. Narišite kvadrat $ABCD$ s stranico dolžine 3 in nato še vektor $\vec{x} = 2\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AD}$. Izračunajte natančno dolžino vektorja $\vec{x}$ ter na minuto natančno kot φ med vektorjema $\vec{x}$ in $\vec{AB}$.

22. V pravokotnem koordinatnem sistemu so dane točke $A(2, 1)$, $B(-2, 3)$ in $C(3, -2)$. Zapišite vektorja $\vec{AB}$ in $\vec{AC}$ s komponentami, izračunajte njun skalarni produkt in kot, ki ga oklepata.

23. Trikotnik ABC določajo oglišča $A(5, -3, 1)$, $B(-2, 1, 5)$ in $C(9, 5, 0)$. Natančno izračunajte obseg trikotnika ABC in kot $\angle ABC$.

24. V enakostraničnem trikotniku ABC s stranico dolžine 4 naj bosta vektorja $\vec{AB} = \vec{a}$ in $\vec{AC} = \vec{b}$. Točka D naj leži na stranici BC tako, da je $|BD| : |DC| = 1 : 3$.

    a) Izrazite vektor $\vec{AD}$ z vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter izračunajte njegovo dolžino. Rezultat naj bo točen.

    b) Izračunajte kot med vektorjema $\vec{AD}$ in $\vec{AC}$. Kot zapišite na minuto natančno.

    c) Izračunajte število x, tako da bo vektor $x\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ vzporeden vektorju $2\vec{a} - \vec{b}$.

    d) Izračunajte število y tako, da bo vektor $\vec{a} + y\vec{b}$ pravokoten na vektor $5\vec{a} - 4\vec{b}$.

25. V pravokotnem koordinatnem sistemu v prostoru imamo točke $A(3, t, -5)$, $B(2t, 4, -1)$ in $C(6, 8, 7)$. Krajevne vektorje teh točk označimo $\vec{a} = \vec{r}_A$, $\vec{b} = \vec{r}_B$ in $\vec{c} = \vec{r}_C$.

    a) Za kateri vrednosti realnega števila t je dolžina vektorja $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b}$ enaka 11?

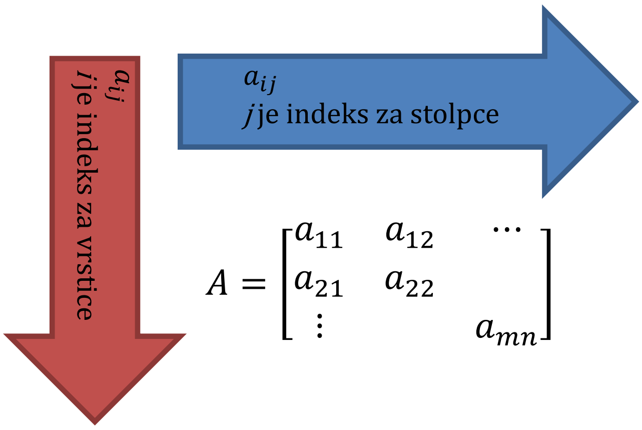
    b) Izračunajte realno število t tako, da bo trikotnik pravokoten s pravim kotom pri oglišču C.

    c) Naj bo $t = 2$. Pokažite, da ležijo v tem primeru vektorji $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ v isti ravnini.

MATRIKE

Matrike so pravokotne razpredelnice števil ali drugih vrednosti (izrazov).

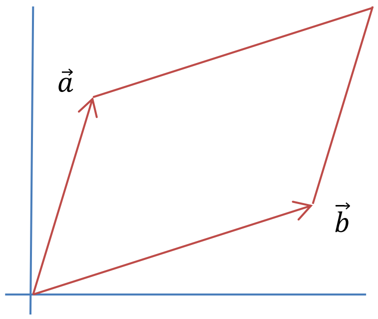
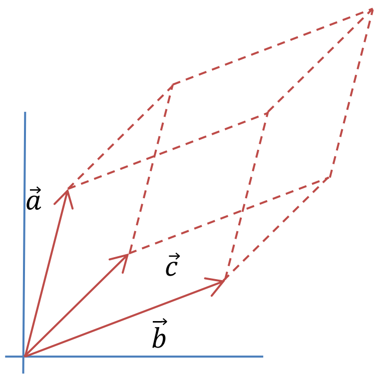
Matrika A ima m vrstic in n stolpcev (A je $m \times n$)



$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \\ \vdots & & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Matriki enake dimenzije sta med seboj enaki $A = B$, če se ujemata na vseh istoležnih mestih.

Seštevanje in odštevanje matrik	Samo za matrike iste dimenzije. $A = [a_{ij}] \epsilon R(m \times n)$ in $B = [b_{ij}] \epsilon R(m \times n)$ Torej $A + B = [a_{ij} + b_{ij}] \epsilon R(m \times n)$ $A - B = [a_{ij} - b_{ij}] \epsilon R(m \times n)$
Množenje s skalarjem	$A = [a_{ij}] \epsilon R(m \times n)$ in $c \in R$ $cA = [c \cdot a_{ij}] \epsilon R(m \times n)$
Množenje matrik	Je izvedljivo le, če je število stolpcev prve matrike enako številu vrstic druge matrike. Če je $\mathrm{A} = [\mathrm{a_{ij}}] \epsilon \mathrm{R}(\mathrm{m} \times \mathrm{n})$ in $\mathrm{B} = [\mathrm{b_{ij}}] \epsilon \mathrm{R}(\mathrm{n} \times \mathrm{p})$ potem je $\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = [\mathrm{a_{ij}}] \epsilon \mathrm{R}(\mathrm{m} \times \mathrm{p})$ $[\mathrm{A} \cdot \mathrm{B}]_{\mathrm{ij}} = (\mathrm{a_{i1}}, \mathrm{a_{i2}}, \mathrm{a_{i3}}, \dots, \mathrm{a_{ip}}) \cdot (\mathrm{b_{1j}}, \mathrm{b_{2j}}, \mathrm{b_{3j}}, \dots, \mathrm{b_{pj}})$ Pomembno se je zavedati, da <u>komutativnost ne velja</u> $AB \neq BA$.
Enota za množenje	$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ali $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Determinanta kvadratnih matrik  	Determinanta je preslikava, ki <u>kvadratni matriki</u> priredi število. Determinanta reda 2 $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ Absolutna vrednost determinante reda 2 je ploščina paralelograma s stranicami $\vec{a} = (a_{11} \quad a_{12})$, $\vec{b} = (a_{21} \quad a_{22})$. Determinanta reda 3 $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} =$ $= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$ Absolutna vrednost determinante reda 3 je prostornina paralelepipeda s stranicami $\vec{a} = (a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13})$, $\vec{b} = (a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23})$ in $\vec{c} = (a_{31} \quad a_{32} \quad a_{33})$. Determinanto reda več kot 3 razvijemo po vrstici ali po stolpcu (reduciramo na determinanto reda 3).
Inverzna matrika	Inverzna matrika obstaja <u>samo pri kvadratnih matrikah</u> z $det(\cdot) \neq 0$. Uporaba kofaktorjev pri določanju inverzne matrike: $$A^{-1} = \frac{1}{detA} \mathrm{coA}^T$$ Inverzna matrika pri matrikah reda 2: $$A^{-1} = \frac{1}{detA} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}^T$$ Uporaba elementarnih transformacij pri določanju inverzne matrike: Preuredimo razširjeno matriko $[A \vdots I]$ z elementarnimi transformacijami na vrsticah in dobimo $[I \vdots A^{-1}]$.

Reševanje matričnih enačb	Matrične enačbe rešujemo podobno kot navadne enačbe, paziti pa moramo na nekomutativnost množenja in množenje z inverzno matriko namesto deljenja.
Rang matrike	Rang matrike $r(\cdot)$ je velikost največje neničelne poddeterminante. Določimo ga tako, da matriko z elementarnimi transformacijami pretvorimo v stopničasto obliko (vsaka vrstica začne v kasnejšem stolpcu). Potem je rang matrike enak številu neničelnih vrstic.
Reševanje sistema enačb	Sistem linearnih enačb zapišemo v matrični obliki $AX = B$, kjer je A matrika koeficientov, X vektor neznank in B vektor konstant z desne strani enačb. Homogen sistem $AX = 0$ je vedno rešljiv. Če je $det(A) \neq 0$ ima sistem samo trivialno rešitev $X = 0$.
Cramerjevo pravilo	Ko je matrika A kvadratna in nesingularna, lahko rešujemo sistem linearnih enačb po Cramerjevem pravilu: $$x_k = \frac{detA_k}{detA}$$ kjer je $detA$ determinanta sistema, $detA_k$ pa determinanta, ki se od $detA$ razlikuje po k-tem stolpcu. Tam ima stolpec desnih strani enačb, to je stolpec matrike B.
Gaussova eliminacija	Definiramo razširjeno matriko $\bar{A} = [A \vdots B]$ Sistem je rešljiv natanko takrat, ko je $r(A) = r(\bar{A})$ Enolično rešljiv - določen Razširjeno matriko lahko z elementarnimi transformacijami reduciramo v zgornjo trikotno in $$r(A) = številu\ neznank$$ Parametrično rešljiv - nedoločen Razširjeno matriko lahko z elementarnimi transformacijami reduciramo v trapezno matriko in $$r(A) < številu\ neznank$$ Nima rešitve – protisloven $$r(A) \neq r(\bar{A})$$

1.

Dane so realne matrike:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj izraze, ki obstajajo: $A+B$, AB, BA, AC, C^TC, CC^T, $2A+D^T$, C^TD.

2. Danim matrikam določite determinanto in inverzno matriko:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 0 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Reši matrično enačbo $X \cdot A = B$ za $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ in $B = \begin{bmatrix} 17 & 34 \end{bmatrix}$.

Iz matričnih enačb izrazi X :

a) $X \cdot A + B = X \cdot C$,

b) $A \cdot X \cdot B + X \cdot B = 2C$,

Določi rang matrik:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 9 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 7 & 7 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

Reši naslednje sisteme linearnih enačb:

a) $\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 2 \\ 4x + 2y - 6z &= 3 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} 2x + y - 3z &= 2 \\ 4x + 2y - 6z &= 4 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} 2x - y + z &= 8 \\ x - 3y - 5z &= 6 \\ 3x + y - 7z &= -4 \end{aligned}$

Določi a tako, da bo imel homogen sistem netrivialno rešitev in jo poišči.

$$3x + 2y + 5z = 0$$

$$6x + 4y + az = 0$$

$$3x + 3y - z = 0$$

UPORABNE NALOGE

1. Podjetje izdeluje izdelke A, B, C iz surovin P, Q, R.
   Za enoto izdelka A potrebuje 1 enoto surovine P, 1 enoto surovine Q in 2 enoti surovine R.
   Za enoto izdelka B pa potrebuje 2 enoti surovine P , 9 enot surovine Q in 4 enote surovine R; medtem ko za enoto izdelka C potrebuje 2 enoti surovine P, 3 enote surovine Q in 8 enot surovine R.
   Trenutno je v skladišču 12 enot surovine P, 22 enot surovine Q in 36 enot surovine R.
   Koliko enot izdelka A oziroma B in C naj podjetje izdela, da bo skladišče popolnoma prazno?

	A	B	C	Količina surovin
P	1	2	2	12
Q	1	9	3	22
R	2	4	8	36
Količina izdelkov	x	y	z	

2. Trije sosedje so se dogovorili, da bodo drug drugemu pomagali obnoviti hišo. Pri tem bo prvi 30% svojega časa porabil za obnovitev svoje hiše, 40% časa za obnovitev hiše drugega soseda in 30% za obnovitev hiše tretjega soseda. Drugi sosed pa bo 40% časa delal pri prvemu, 10% v svoji hiši in 50% pri tretjemu. Tretji sosed pa bo 10% svojega časa delal pri prvemu, 30% pri drugemu in 60% v svoji hiši.
   Na koncu želijo izračunati želijo izračunati plačilo za svoje delo, tako da bo vsota, ki jo nekdo plača za delo v svoji hiši, enaka vsoti, ki jo prejme od drugih.
   Podatki o porazdelitvi časa dela sosedov pri obnovi posameznih hiš so zbrani v tabeli.

	Sosed 1	Sosed 2	Sosed 3
Sosed 1	0.3	0.4	0.3
Sosed 2	0.4	0.1	0.5
Sosed 3	0.1	0.3	0.6
Plačilo	x_1	x_2	x_3