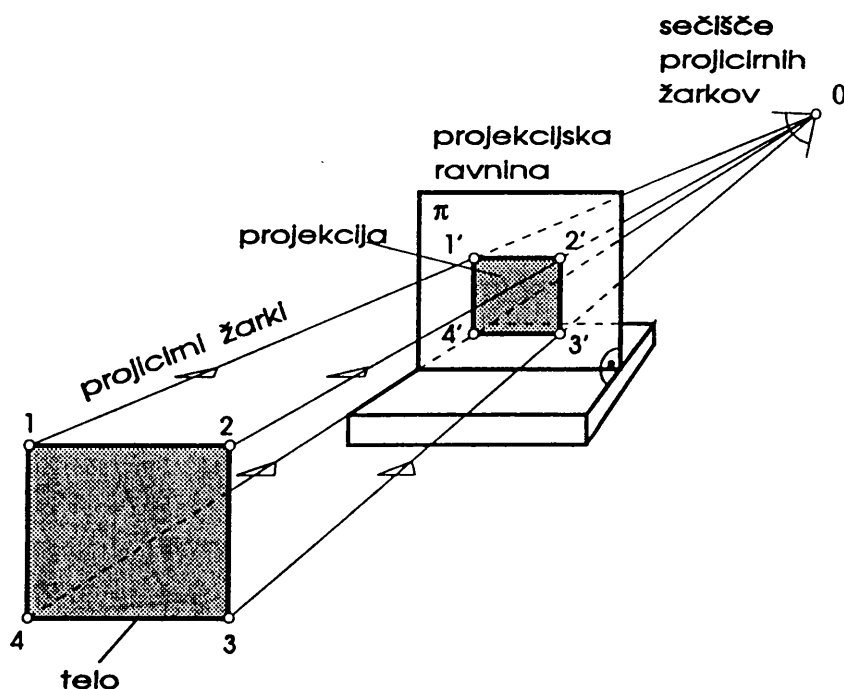


2 PROJICIRANJE IN NAČINI PROJICIRANJA

Za projiciranje teles potrebujemo projicirne žarke in projekcijsko ravnino, na katero projiciramo. Projicirni žarki izhajajo iz neke stalne točke, označene z 0. Imenujemo jo **žarišče** ali **sečišče** žarkov. Ploskev, na katero projiciramo, je vedno ravna in jo imenujemo **projekcijska ravnina**. Označena je z grško črko π .

2.1 Centralna projekcija

Najboljšo predstavo o telesih in njihovi legi v prostoru daje centralna projekcija ali **perspektiva** (slika 1), kjer leži sečišče žarkov v **končni oddaljenosti od telesa**, ki ga projiciramo. Projicirni žarki, ki prihajajo iz sečišča 0 do posameznih točk telesa, prebadajo projekcijsko ravnino v perspektivni obliki. Projekcijska ravnina je prebodena v projicirnih točkah 1', 2', 3', 4' in je običajno postavljena navpično med telo in projekcijsko sečišče. Lega projekcijskega sečišča pa nikakor ne sme sovpadati s projekcijsko ravnino.

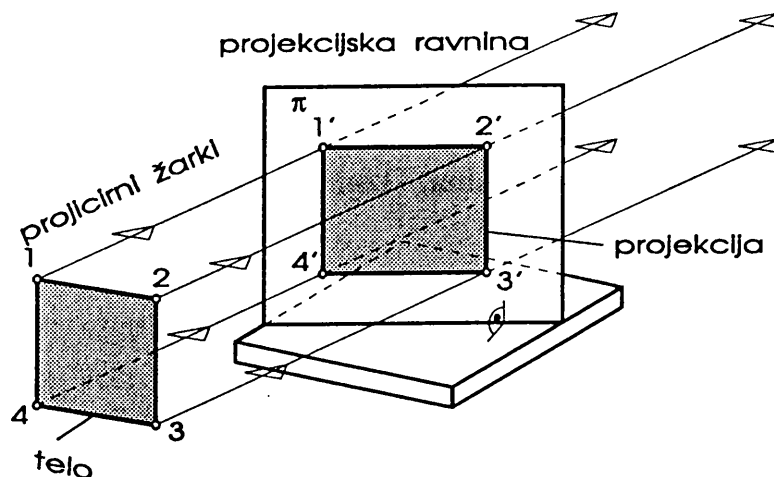


Slika 1 Prikaz telesa s centralno projekcijo

2.2 Vzporedna projekcija

Iz slike 2 je razvidno, da leži projekcijsko sečišče pri vzporedni projekciji v **neskončnosti**, posamezni projicirni žarki pa so med seboj **vzporedni**. Projekcijska ravnina

je postavljena navpično, glede na telo pa leži pod zaželenim kotom, ki je pri preobodu projekcijske ravnine za vse projicirne žarke enak.



Slika 2 Prikaz telesa z vzporedno projekcijo

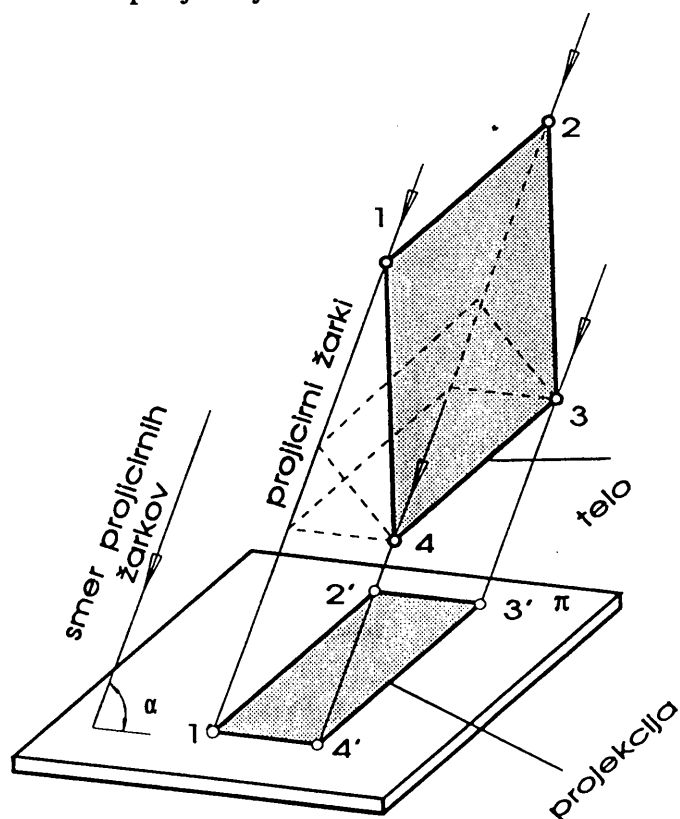
2.2.1 Poševna vzporedna projekcija

V primeru, ko padajo projicirni žarki na projekcijsko ravnino pod kotom α (slika 3), dobimo **poševno** ali **splošno** vzporedno projekcijo.

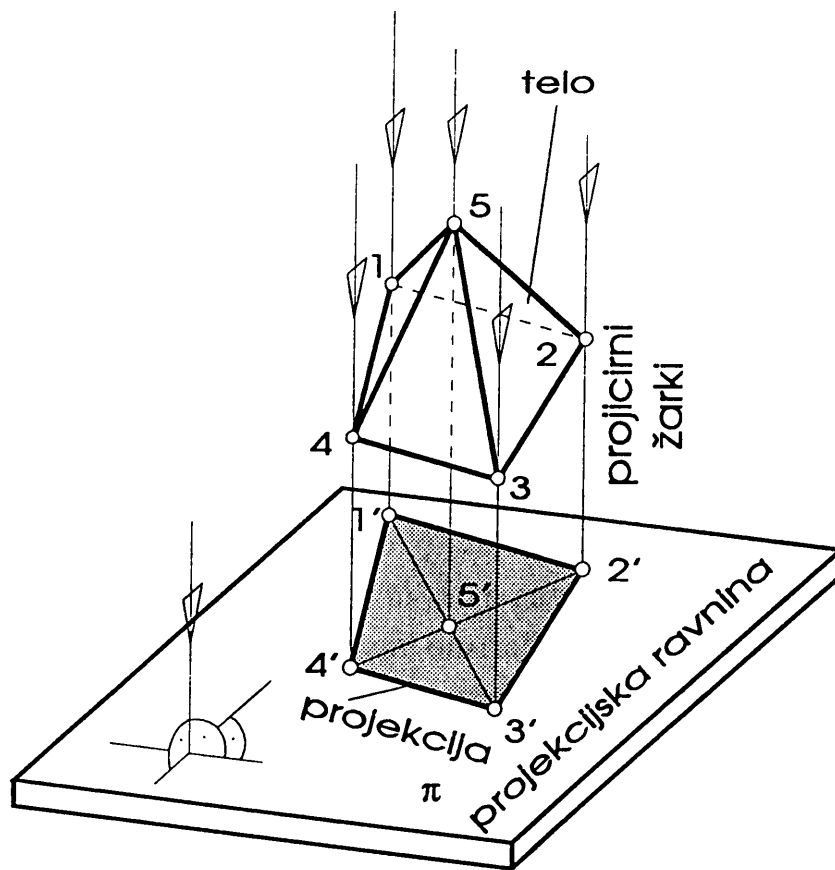
2.2.2 Pravokotna ali ortogonalna vzporedna projekcija

Če tvorijo projicirni žarki s projekcijsko ravnino pravi kot v vseh smereh, govorimo o **pravokotni** ali **ortogonalni** vzporedni projekciji (slika 4).

Poznamo poseben način projiciranja teles v naravni velikosti in obliki v primeru, če najmanj dve projekcijski ravnini ležita **pravokotno druga na drugo**.



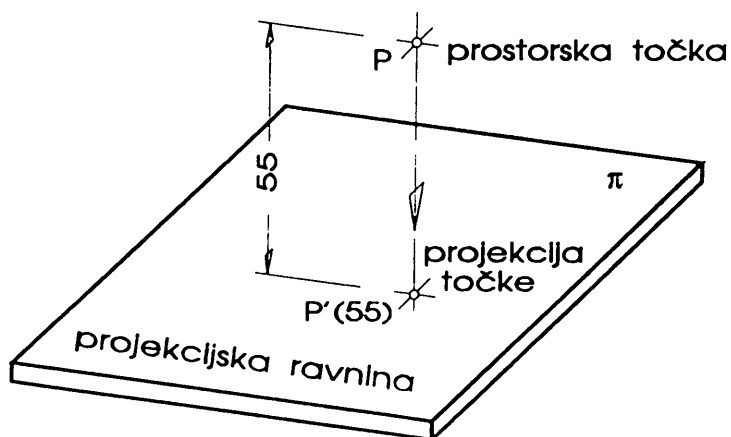
Slika 3 Prikaz telesa s poševno vzporedno projekcijo



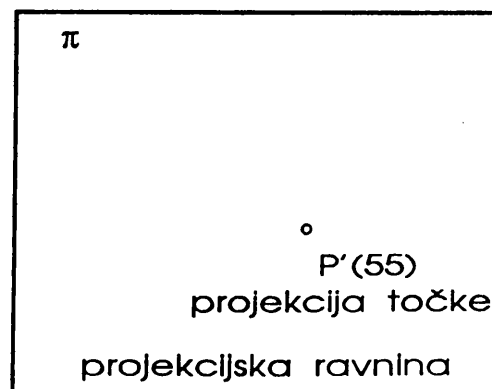
Slika 4 Prikaz telesa z navpično vzporedno projekcijo

2.2.3 Kotirana vzporedna projekcija - navpična enoravninska projekcija

Navpično projekcijo na eno samo ravnino (projekcijsko ravnino π) imenujemo kotirana **projekcija** (slika 5). Lega točke v prostoru je popolnoma definirana, če poznamo njeno projekcijo in njeno oddaljenost od projekcijske ravnine (koto točke - koordinata), slika 6.



Slika 5 Prostorska predstavitev kotirane vzporedne projekcije

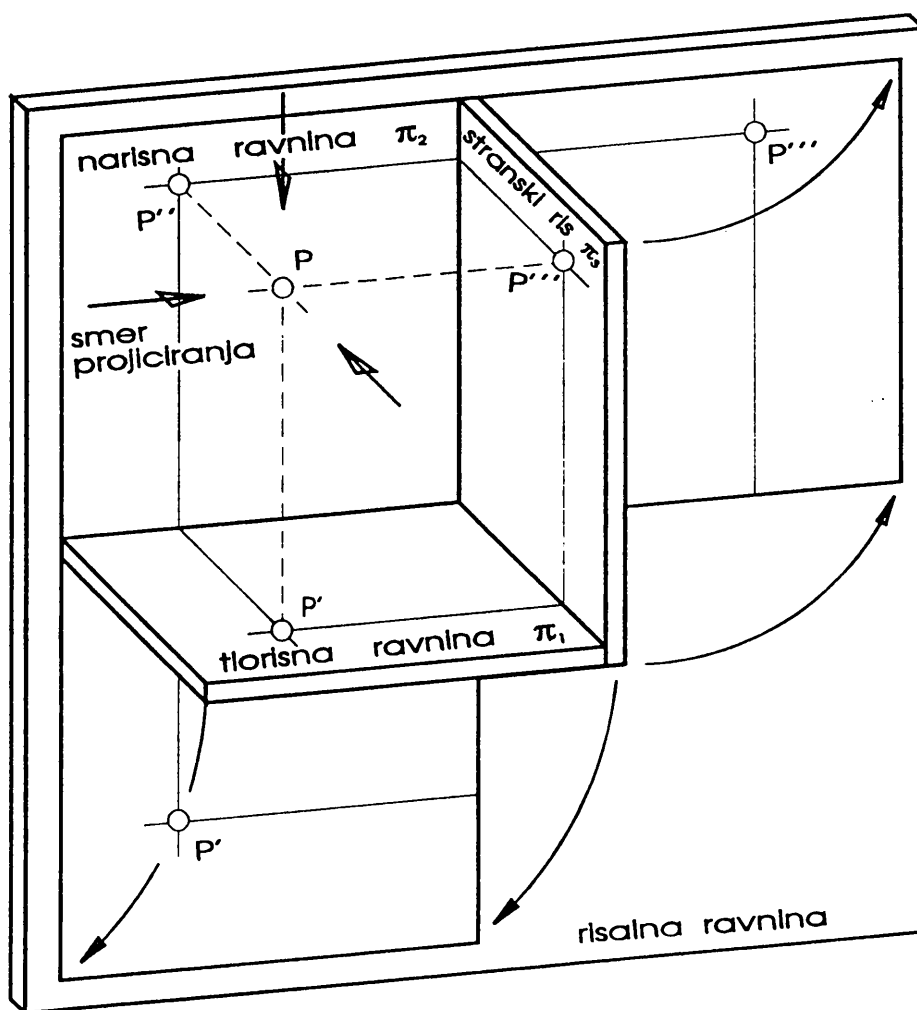


Slika 6 Kotirana projekcija v eni ravnini

3 PRAVOKOTNA PROJEKCIJA NA DVE PROJEKCIJSKI RAVNINI

Telo v prostoru ponazorimo bolje, če ga projiciramo na dve med seboj pravokotni projekcijski ravnini. V tehnični praksi je ena od obeh ravnin vodoravna, druga pa navpična.

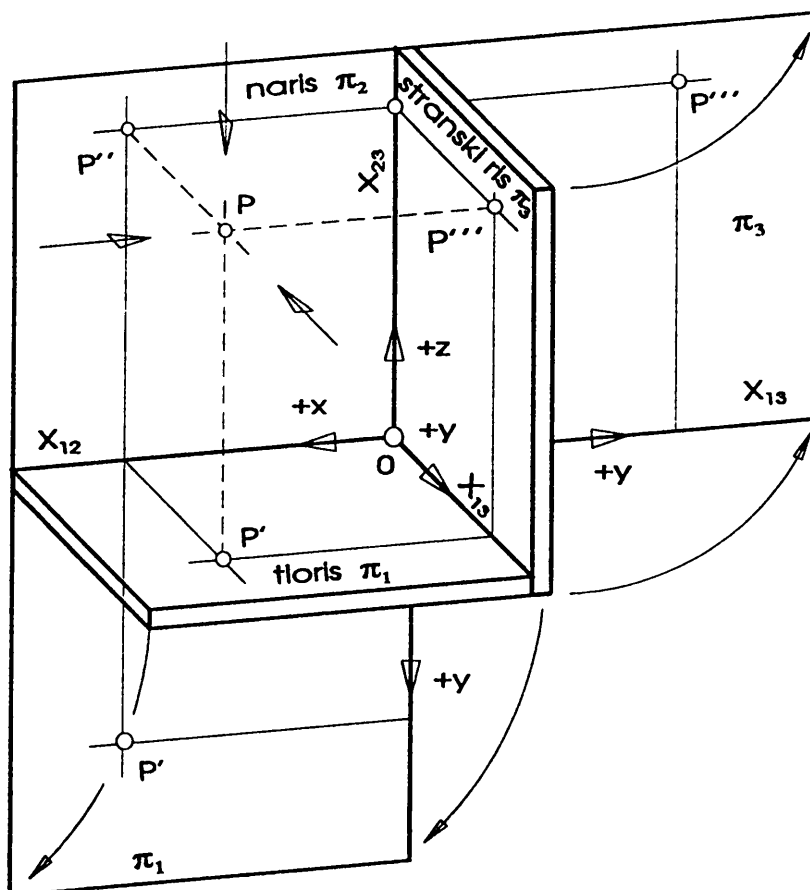
Vodoravno projekcijsko ravnino imenujemo tlorisno ali **prvo projekcijsko ravnino**; zaznamujemo jo s π_1 . Navpično projekcijsko ravnino imenujemo **narisno** ali **drugo projekcijsko ravnino** in jo označujemo s π_2 . Ravnini se sekata v **presečnici** ali **osi** x_{12} projekcijskega sestava. Pri telesih nejasnih oblik se mnogokrat uporablja še tretja projekcijska ravnina, ki je pravokotna na π_1 in π_2 in jo označujemo s π_3 . Imenujemo jo **ravnina stranskega risa** (slika 7). Tlorisno ravnino π_1 in ravnino stranskega risa π_3 zavrtimo v narisno ravnino π_2 in dobimo **ravnino risanja**.



Slika 7 Dimetrična predstavitev načinov pravokotnega projiciranja

3.1 Pravokotna projekcija točke

Lego točke v prostoru določimo s prostorskim pravokotnim premočrtnim koordinatnim sestavom (slika 8). Koordinatni sestav tvorijo tri med seboj pravokotne koordinatne osi x , y in z s skupnim sečiščem, tako imenovanim **izhodiščem** 0. Skozi dve in dve teh treh osi potekajo tri koordinatne ravnine, ki so prav tako med seboj pravokotne. Če si koordinatne ravnine izberemo za **projekcijske ravnine** π_1 , π_2 , π_3 , dobimo sestav, ki nam ga kaže slika 8.



Slika 8 Dimetrična predstavitev projiciranja točke

π_1 = xy-ravnina = **prva projekcijska ravnina** = tlorisna ravnina

π_2 = xz-ravnina = **druga projekcijska ravnina** = narisna ravnina

π_3 = yz-ravnina = **tretja projekcijska ravnina** = stranska ravnina

Koordinatne osi pa predstavljajo:

x-os = x_{12} = presečnica ravnin π_1 in π_2 ,

y-os = x_{13} = presečnica ravnin π_1 in π_3 ,

z-os = x_{23} = presečnica ravnin π_2 in π_3 .

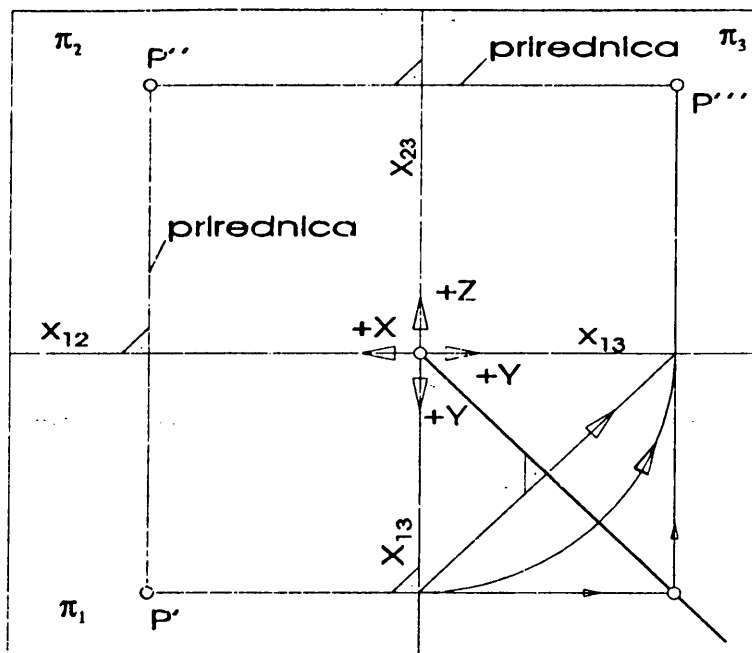
Posledica preslikave točke P v prostoru:

P' = tloris točke P ,

P'' = naris točke P ,

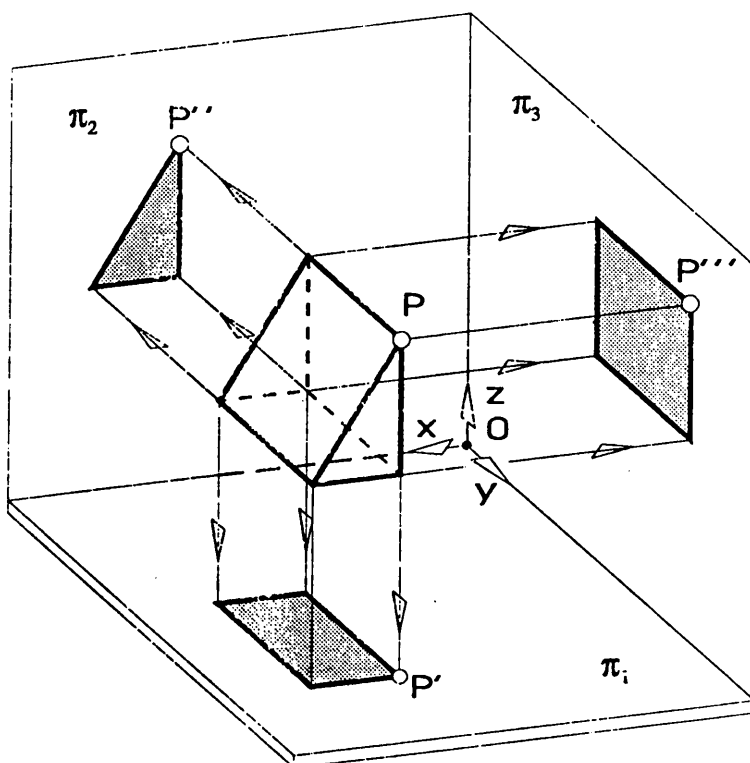
P''' = stranski ris točke P .

Slika 9 predstavlja preslikavo točke v prostoru s pomočjo normalne projekcije. Vidna je povezanost preslikave v stranskem risu π_3 s projekcijama v tlorisu π_1 in narisu π_2 . To pa pomeni, da če imamo poznani dve projekciji, lahko tretjo določimo s konstrukcijo. Povezovalne sledi med posameznimi projekcijami so pravokotne na presečišča ravnin in se imenujejo **ordinale** ali **prirednice**. Vsaka točka je jasno definirana z dvema projekcijama, ki ležita na isti ordinali.



Slika 9 Predstavitev točke v prostoru s pravokotno projekcijo v treh ravninah

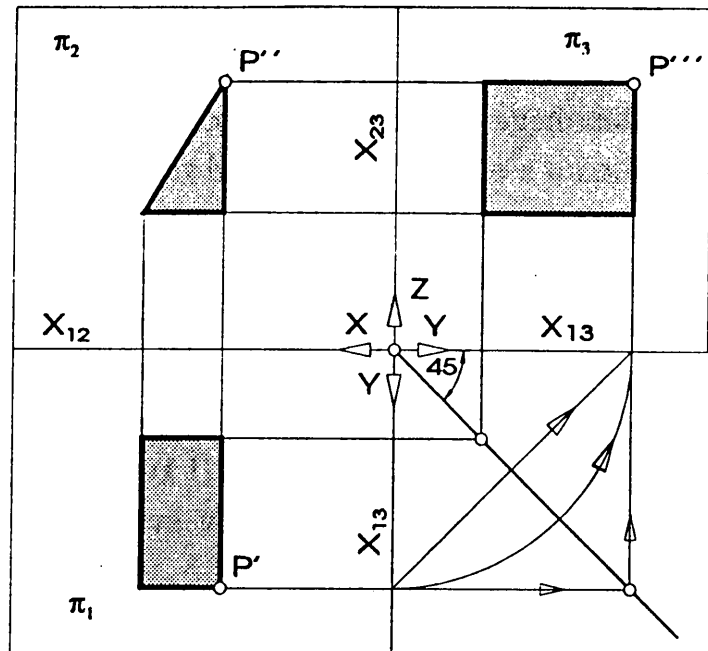
Robovi teles se stikajo v ogliščih, ki predstavljajo posamezne točke v prostoru (slika 10). S preslikavo posameznih oglišč se lahko v normalni projekciji preslika celotno telo (slika 11). Za pravilno predstavitev velikosti, oblike in lege telesa je potrebno v normalni projekciji poznati vsaj dve projekciji.



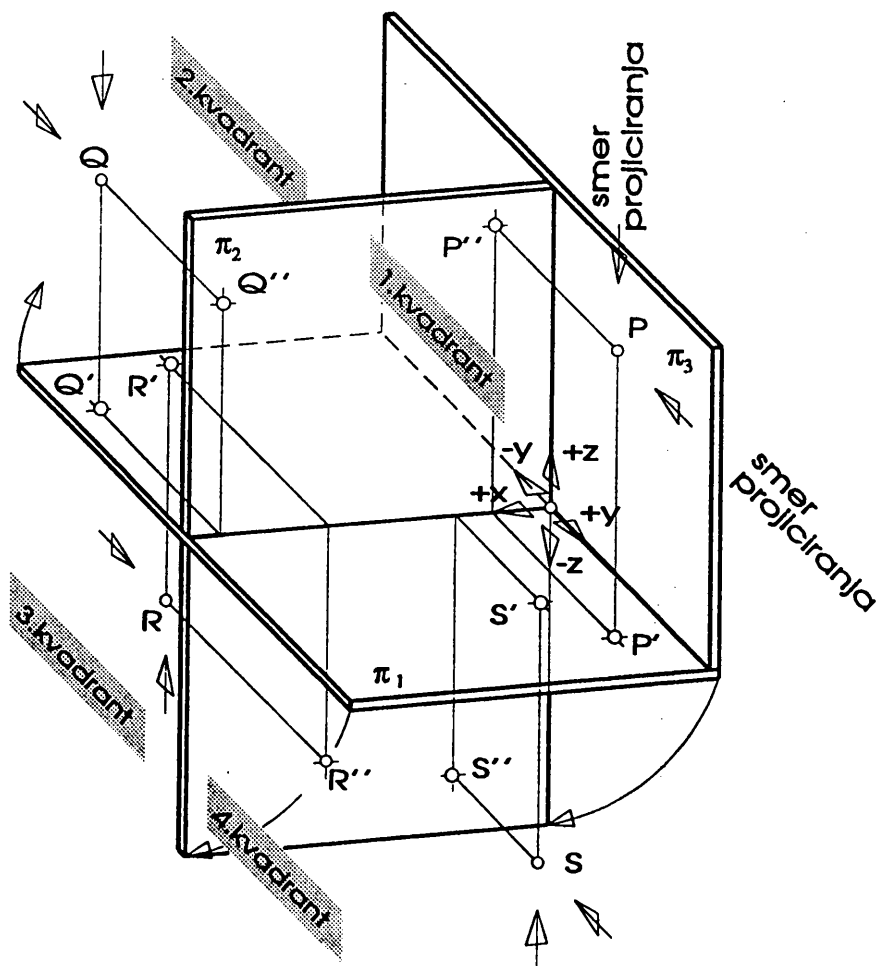
Slika 10 Dimetrična projekcija prizme v treh projekcijskih ravninah

S prvo in drugo projekcijsko ravnino se prostor razdeli na štiri dele - **kvadrante**, kot kaže slika 12:

- I kvadrant leži med π_1 in π_2 ,
- II kvadrant leži med $-\pi_1$ in π_2 ,
- III kvadrant leži med $-\pi_1$ in $-\pi_2$ in
- IV kvadrant leži med π_1 in $-\pi_2$.



Slika 11 Pogledi prizme v normalni projekciji



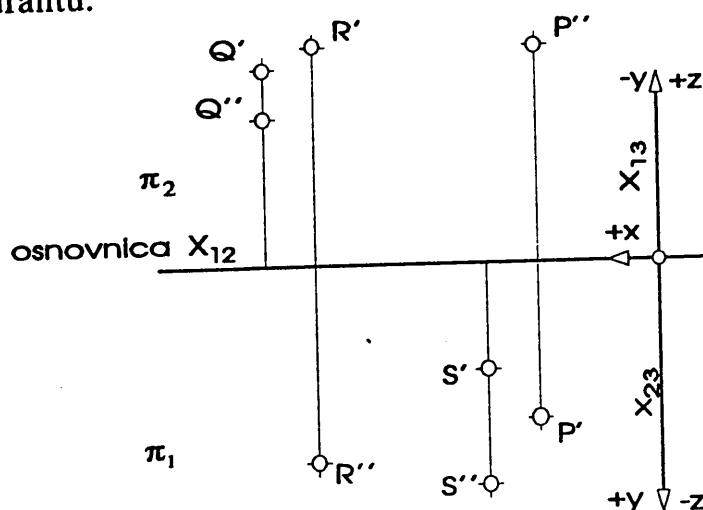
Slika 12 Dimetrična predstavitev točk v posameznih kvadrantih

Vsako točko P, Q, R, S določimo s tremi podatki - tako imenovanimi **koordinatami točke**. Označene so z x , y in z . Koordinata x pomeni oddaljenost točk po osi x od koordinatnega izhodišča 0. Koordinata y predstavlja oddaljenost točk od ravnine π_2 in koordinata z oddaljenost točk od ravnine π_1 .

Torej bomo zapisali **prostorske koordinate** za posamezne točke:

$P(x,y,z)$ = lega točke P v I kvadrantu,
 $Q(x,-y,z)$ = lega točke Q v II kvadrantu,
 $R(x,-y,-z)$ = lega točke R v III kvadrantu in
 $S(x,y,-z)$ = lega točke S v IV kvadrantu.

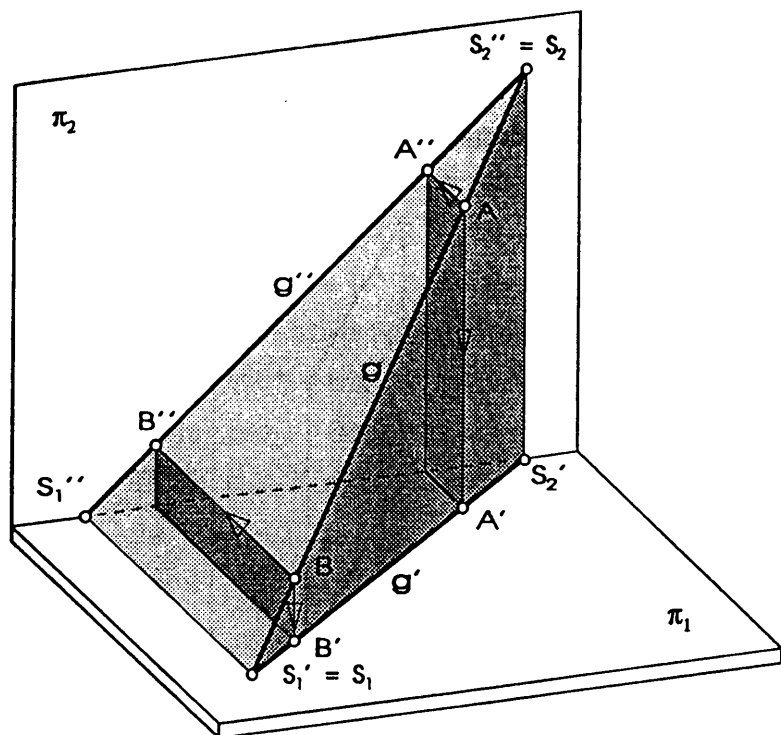
Položaj točk želimo narisati v ravnini, zato zavrtimo tlorisno ravnino π_1 **navzdol**, da se **prekrije** z narisno ravnino π_2 (slika 13). Pri tem padeta koordinati x in y točke P na **isto vertikalno**. Pozitivne vrednosti za y nanašamo pod os x , negativne pa nad os x . Pozitivne koordinate z nanašamo nad, negativne pa pod os x .



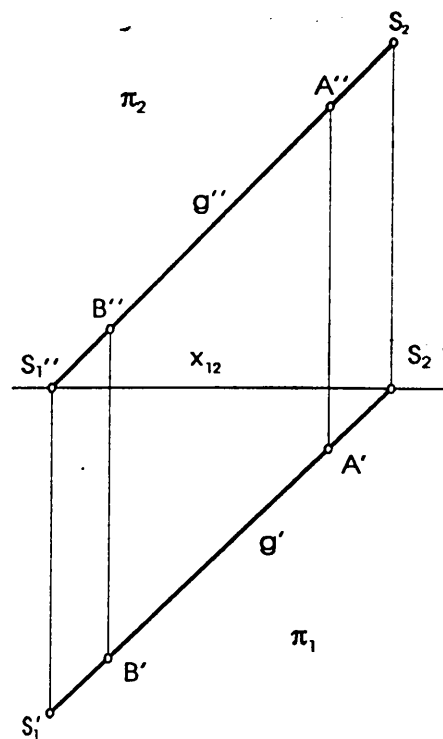
Slika 13 Lega projekcij posameznih točk pri zvrnjeni tlorisni ravnini π_1

3.2 Pravokotna projekcija premice

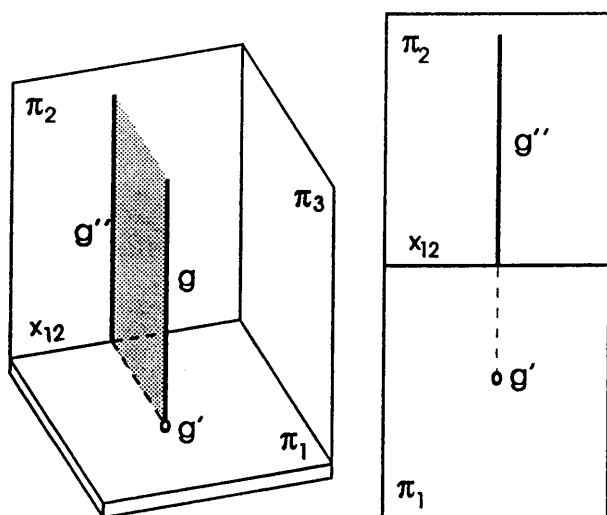
Projekcije prostorskih premic na ravnino so ponovno premice, razen če premica ne stoji pravokotno na eno od projekcijskih ravnin. Pravokotna projekcija premice je lahko samo **krajša** od premice same ali pa njej **enaka**. Krajša je tedaj, kadar je premica poševna glede na projekcijsko ravnino, enaka pa le, kadar je premica ali vzporedna s projekcijsko ravnino ali pa na njej leži. Kadar leži premica na ravnini, ki je hkrati pravokotna na dve projekcijski ravnini (npr. π_1 in π_2) - tako imenovani dvojni projekcijski ravnini, ki jo imenujemo tudi profilna ravnina - je ena njena projekcija lahko samo točka (slika 16 ,17). Tako premico imenujemo profilna premica. Za premico, ki je istočasno poševna nasproti tlorisni π_1 in narisni π_2 ravnini, pravimo, da je v **splošni legi** (slika 14) in se projicira v obeh risih kot premica. Zato pravimo, da je premica s svojim **pravokotnim tlorisom** in narisom **enolično določena** (slika 15).



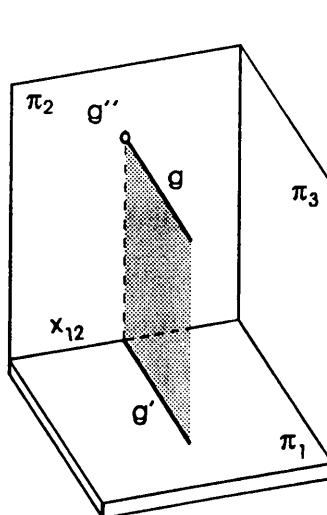
Slika 14 Premica v splošni legi



Slika 15 Projekciji premice v normalni projekciji



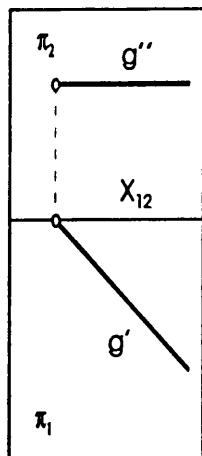
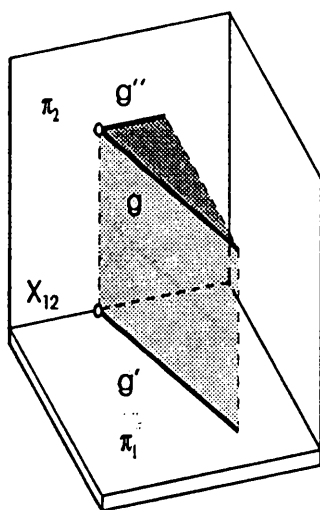
Slika 16 Dimetrična in pravokotna projekcija premice $g \perp \pi_1$



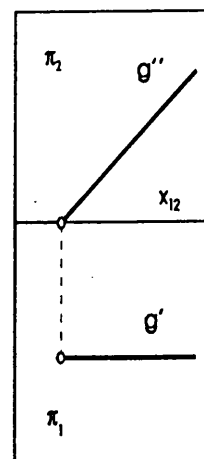
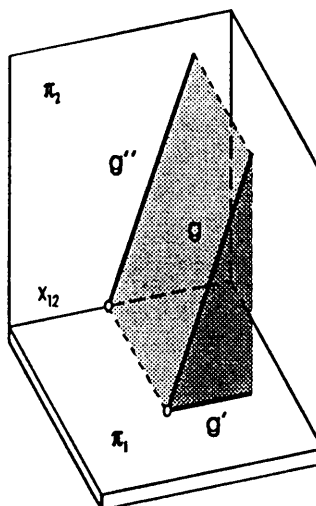
Slika 17 Dimetrična in pravokotna projekcija premice $g \perp \pi_2$

Če premica g prebada tlorisno ravnino π_1 v točki $S_1 = S_1'$, narisno ravnino π_2 pa v točki $S_2'' = S_2'$, imenujemo ti dve točki **prebodišči** ali **sledišči** premice g .

Kadar točki A in B ležita na premici g , potem njuna tlorisa A' , B' (naris A'' , B'') ležita na tlorisu premice g' (narisu g''). Daljica je del premice, ki je omejen s končnima točkama A in B. V prostoru je daljica popolnoma določena s projekcijama končnih točk.



Slika 18 Dimetrična in pravokotna projekcija premice $g \parallel \pi_1$

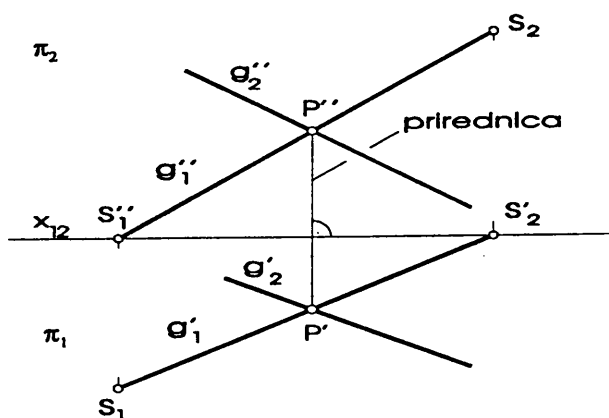


Slika 19 Dimetrična in pravokotna projekcija premice $g \parallel \pi_2$

Sliki 18 in 19 prikazujeta posebni legi premic v prostoru. V prvem primeru je premica g **vzporedna** z ravnino π_1 in **poševna** glede na ravnino π_2 , v drugem primeru pa je obratno. Tako sta projekciji narisa in tlorisa premice g vzporedni s **presečiščem - osnovnico** projekcijskih ravnin x_{12} .

3.3 Predstavitev dveh premic

Dve premici, ki se ne **skladata**, se ali **sekata** ali sta **vzporedni** ali pa sta **mimobežni**. Za vzporedni premici pravimo, da se sekata v **nebistveni** - to je neskončno oddaljeni točki. To pomeni, da sta neke vrste sečnici. V našem primeru bomo obravnavali premici kot sečnici, če imata skupno **bistveno** točko.



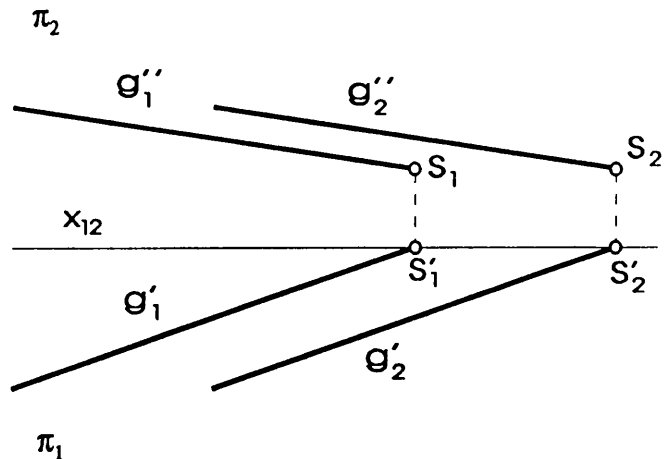
Slika 20 Presečišče dveh premic g_1 in g_2

3.3.1 Sečnici

V pravokotni projekciji na π_1 in π_2 se **sečnici** g_1 in g_2 projicirata ponovno kot **sečnici** tako, da sta tloris P' in naris P'' presečne točke P na **skupni prirednici** (slika 20).

3.3.2 Vzporednici

Vzporedne premice imajo **vzporedne ustrezne projekcije** (slika 21). To pomeni, da je tloris premice g_1' vzporeden s tlorisom premice g_2' , naris premice g_1'' pa z narisom premice g_2'' . Tu moramo izvzeti **profilne premice**, pri katerih dejstvo, da so ustrezne projekcije med seboj vzporedne, še ni dokaz, da sta tudi premici med seboj vzporedni.

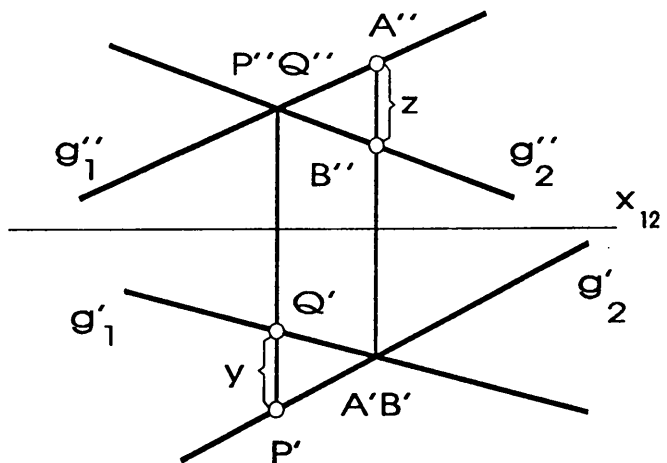


Slika 21 Vzporedni premici g_1 in g_2 , $g_1 \parallel g_2$

3.3.3 Mimobežnici

Mimobežnici sta premici, ki nimata **nobene skupne točke niti bistvene niti nebistvene**. Navidezni sečišči tlorisov g_1' in g_2' ter narisov g_1'' in g_2'' (slika 22) sta v bistvu le projekciji štirih prekrivalnih točk P, Q in A, B.

Razdalja z med točkama A'' in B'' predstavlja nivojsko razliko med premicama. Razdalja y med točkama P' in Q' pa določa razmak med premicama g_1 in g_2 .



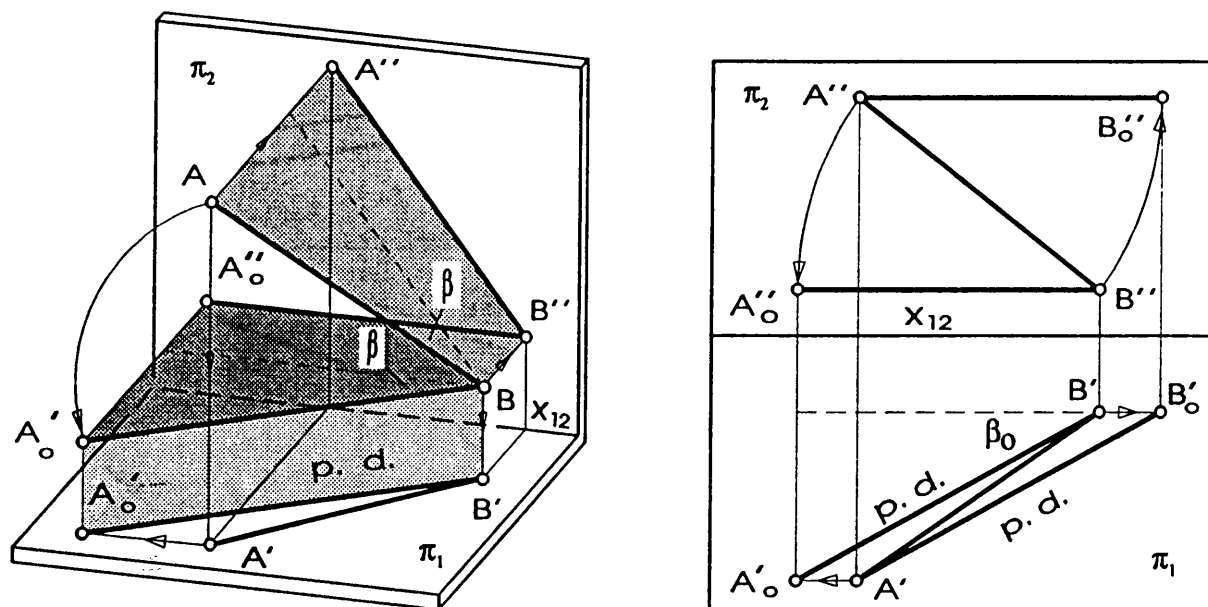
Slika 22 Mimobežnici g_1 in g_2

3.4 Določanje prave dolžine daljice in velikosti kota nagiba

Kadar je daljica v prostoru vzporedna s tlorisno π_1 ali narisno π_2 ravnino, je njen tloris oziroma naris enak pravi dolžini daljice. Če pa je daljica nagnjena proti projekcijskima ravninama, moramo ugotoviti njeno pravo velikost.

Pravo dolžino daljice določimo z **vrtenjem daljice** v lego, vzporedno z eno od projekcijskih ravnin oziroma z **zvratom projicirnega trapeza**.

3.4.1 Določanje prave dolžine daljice z vrtenjem v lego, vzporedno s π_1



Slika 23 Dimetrična in pravokotna predstavitev vzporedne zavrtitve daljice z ravnino π_1

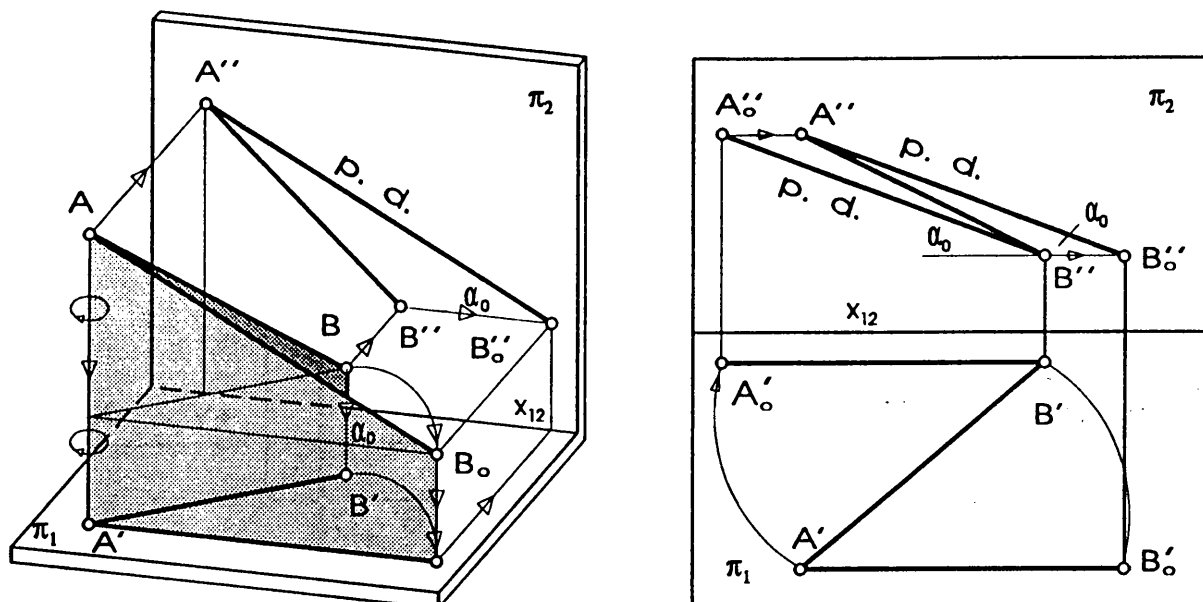
Narisno projekcijo daljice $\overline{AB}$ zavrtimo okoli točke $B''(A'')$ z radijem $r = \overline{A''B''}$ tako, da je vzporedna s tlorisno ravnino π_1 oziroma osnovno osjo x_{12} . Točka $B''(A'')$ ostaneta med vrtenjem nepremična. Točka $A'(B')$ se projicira v $A'_0(B'_0)$ in $A''(B'')$ v $A''_0(B''_0)$. Povezava med točkama $B'_0A'_0$ ($B''_0A''_0$) je prava dolžina daljice $\overline{AB}$.

Prava dolžina daljice in vzporednica z narisno projekcijsko ravnino, ki poteka skozi tloris točke $B'(A')$, oklepata naklonski kot β_0 . Ta kot predstavlja pravo velikost nagiba daljice $\overline{AB}$ glede na narisno projekcijsko ravnino π_2 (slika 23).

3.4.2 Določanje prave dolžine daljice z vrtenjem v lego, vzporedno s π_2

Tlorisno projekcijo daljice $\overline{AB}$ zavrtimo okoli točke $A'(B')$ z radijem $r = \overline{A'B'}$ tako, da je razdalja $A'B'_0$ ($B'A'_0$) vzporedna z narisno ravnino π_2 oziroma osnovno osjo x_{12} . Projekciji $A'(B')$, ki sta središči rotacije, ostaneta med rotacijo nepremični. Točka $B'(A')$ rotira v $B'_0(A'_0)$ in $B''(A'')$ in se projicira v $B''_0(A''_0)$. Povezava med točkama $A''B''_0$ ($A'_0B''_0$) je prava dolžina daljice $\overline{AB}$.

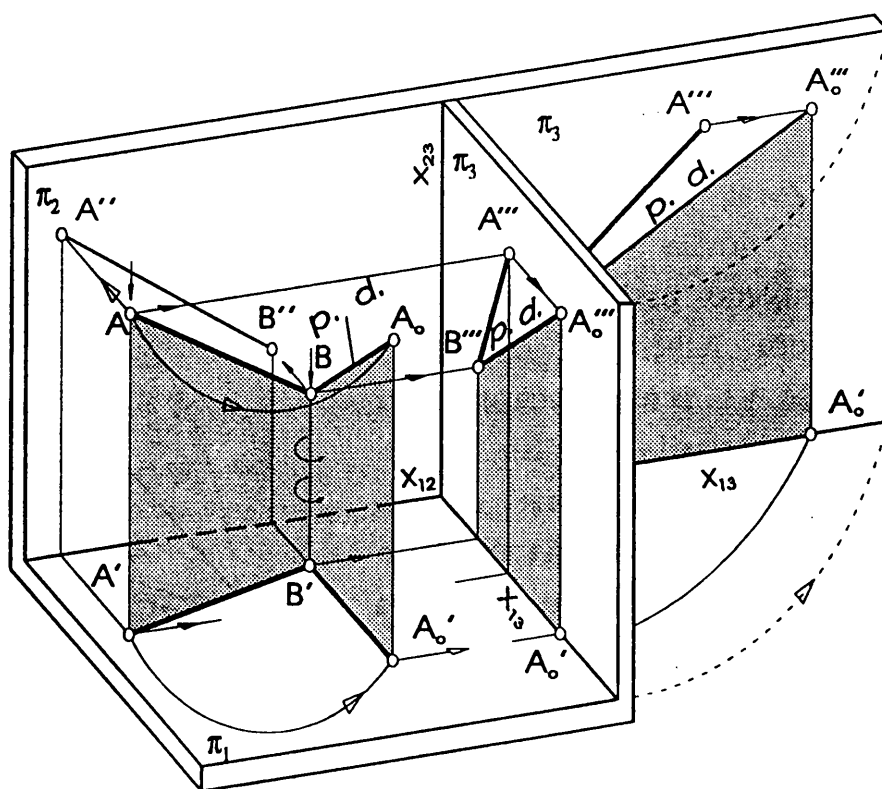
Naklonski kot α_0 predstavlja pravo velikost nagiba daljice $\overline{AB}$ glede na projekcijsko ravnino π_1 (slika 24).



Slika 24 Dimetrična in pravokotna predstavitev vzporedne zavrtitve daljice z ravnino π_2

3.4.3 Določanje prave dolžine daljice z vrtenjem v lego, vzporedno s π_3

Pri vzporedni zavrtitvi daljice $\overline{AB}$ z ravnino stranskega risa π_3 (slika 25) moramo paziti, da leži ravnina π_3 pravokotno na ravnino π_2 tako, da lahko projekcijo na π_3 zavrtimo v podaljšano naravno ravnino π_2 . Tlorisno projekcijo daljice $\overline{AB}$ zavrtimo okoli točke $B'(A')$ z radijem $r = \overline{A'B'}$ tako, da je razdalja $\overline{B'A'_0}$ ($\overline{A'B'_0}$) vzporedna z ravnino stranskega risa π_3 oziroma osjo x_{13} . Središči rotacije $B'A'$ ostaneta med rotacijo nepremični.

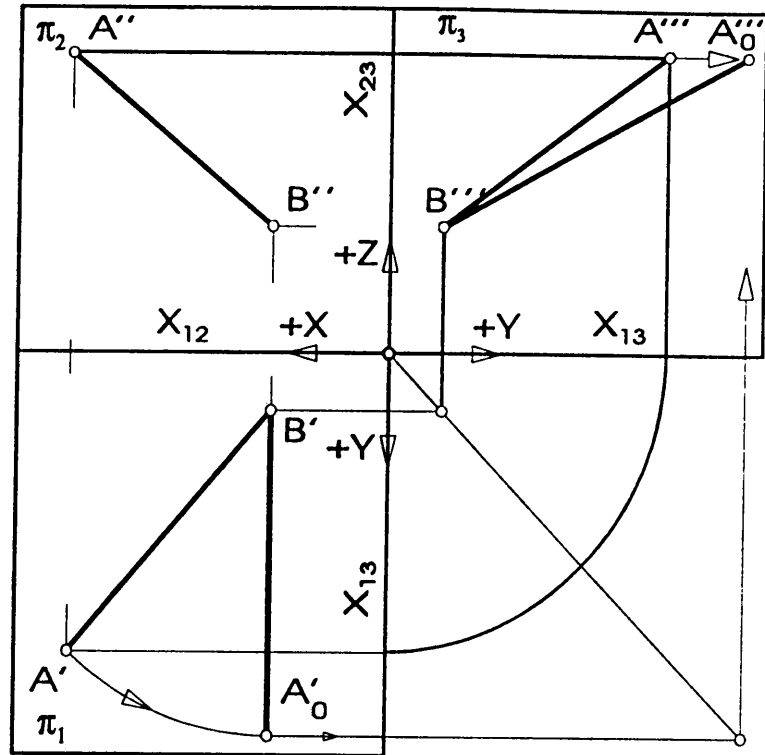


Slika 25 Dimetrična predstavitev vzporedne zavrtitve daljice z ravnino π_3

Tloris točke A' se preslika v A_0' in stranski ris A''' v A_0''' . Povezovalna sled med točkama $B'''A'''$ predstavlja **pravo dolžino** daljice $\overline{AB}$ (slika 26).

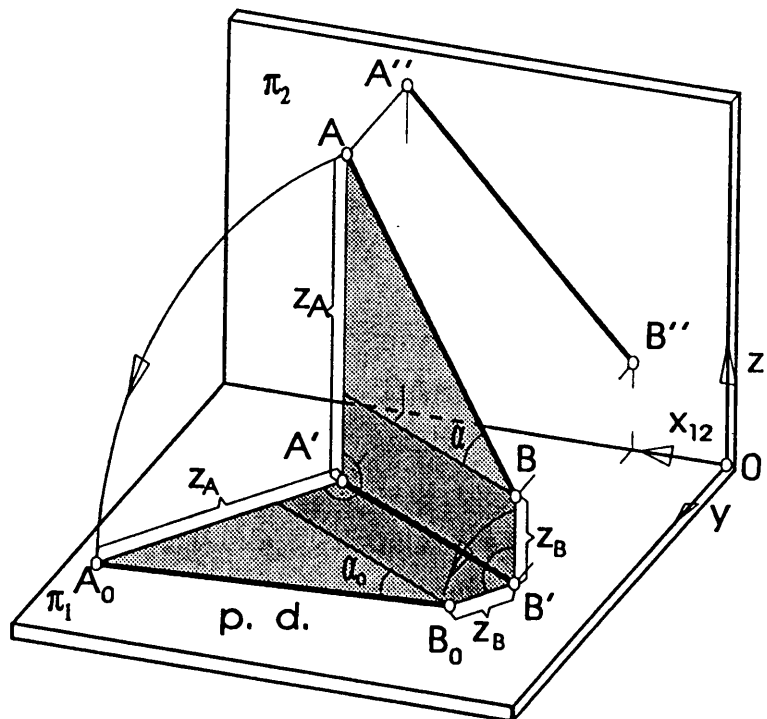
3.4.4 Zvrat projicirnega trapeza

Med daljico $\overline{AB}$ in njenima projekcijama $\overline{A'B'}$ in $\overline{A''B''}$ nastaneta dva geometrijska lika, ki ju imenujemo projicirna trapeza (trapez $ABB'A'$ in trapez $ABB''A''$). Daljica $\overline{AB}$ je obema skupna, na projicirnih žarkih skozi krajišči A in B pa ležita osnovnici trapezov. Če trapez zavrtimo za 90° okoli tlorisa (narisa) daljice na π_1 (π_2), ostaneta osnovnici v zvrnjeni legi pravokotni na tloris (z_b in $z_a \perp A'B'$) daljice.



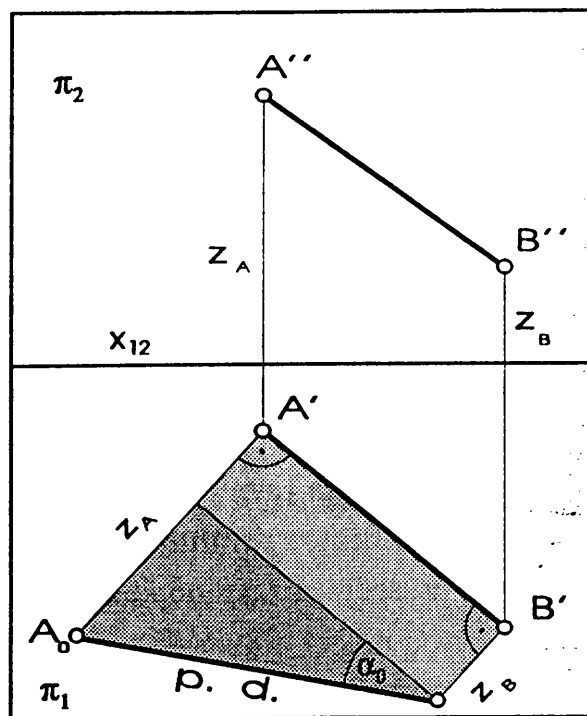
Slika 26 Normalni pogled vzporedne zavrtitve daljice AB z ravnino π_3

Zvrat projicirnega trapeza okoli tlorisa daljice na π_1 imenujemo **prvi zvrat**. V tem primeru naneseemo razdalji s krajišč A in B na pravokotnici, ki smo ju narisali v krajiščih A' in B' pravokotno na tloris daljice. Tako dobimo zvrnjeni točki A_0 in B_0 . Daljica $\overline{A_0B_0}$ je že **prava dolžina** daljice $\overline{AB}$ (slika 27). Kot α_0 med vzporednico, ki je za z_b oddaljena od tlorisa daljice $\overline{A'B'}$, in pravo dolžino daljice $\overline{A_0B_0}$ pa je **dejanski odklon** daljice $\overline{AB}$ od tlorisne ravnine π_1 (slika 28).



Slika 27 Dimetrična predstavitev pravilne dolžine daljice z zvratom v tlorisno ravnino

Zvrat projekcijsnega trapeza okoli narisa $\overline{A''B''}$ na π_2 imenujemo **drugi zvrat**. Tokrat naneseemo na pravokotnici razdalji obeh krajišč in zvrnjeni točki A_0 in B_0 . Dolžina sledi teh dveh točk je **prava dolžina** daljice $\overline{AB}$.



Slika 28 Določanje prave dolžine daljice z zvratom v tlorisno ravnino π_1